

Série A
N° 2740
N° D'ORDRE :
3613

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR LÉON MOTCHANE

1^{re} THÈSE. — PROPRIÉTÉS INVARIANTES PAR CONVERGENCE SIMPLE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 décembre 1954 devant la Commission d'Examen.

MM. MONTEL
DENJOY
FAVARD
CHOQUET

Président.

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1955

Série A
N° 2740
N° D'ORDRE :
3613

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR LÉON MOTCHANE

1^{re} THÈSE. — PROPRIÉTÉS INVARIANTES PAR CONVERGENCE SIMPLE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 décembre 1954 devant la Commission d'Examen.

MM. MONTEL
DENJOY
FAVARD
CHOQUET

Président.

} *Examineurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Grands-Augustins, 55

—
1955

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... J. PÉRES.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	SOLEILLET.....	T	Physique.
A. DENJOY.....	T	Théorie des fonctions.	FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DANJON.....	T	Astronomie.
E. DARMOIS.....	T	Enseignement de Physique.	FROMAGEOT.....	T	Chimie biologique.
ROBERT LÉVY.....	T	Physiologie comparée.	LAPORTE.....	T	Physique générale et Radio-activité.
FOCH.....	T	Mécanique physique et expérimentale.	JANET.....	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
PAUTHENIER.....	T	Électrotechnique générale.	PETIT.....	T	Biologie maritime.
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
JOB.....	T	Chimie générale.			
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	GALLIEN.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
GARNIER.....	T	Géométrie supérieure.	EICHHORN.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
PÉRES.....	T	Mécanique des fluides et applications.	DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LAUGIER.....	T	Physiologie générale.	M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie-Physique.
M. CURIE.....	T	Physique (P. C. B.).	THELLIER.....	T	Physique du Globe.
VALIRON.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	AUDUBERT.....	T	Électrochimie.
BARRABÉ.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	L'HÉRITIER.....	T	Génétique.
G. DARMOIS.....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	GRIVET.....	T	Radioélectricité.
JACQUES BOURCART.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	PONCIN.....	T	Mécanique des fluides.
AUBEL.....	T	Chimie biologique.	THIRY.....	T	Mécanique appliquée.
M ^{me} JOLIOT-CURIE.....	T	Physique générale et Radio-activité.	DUBREIL.....	T	Arithmétique et théorie des nombres.
PLANTEFOL.....	T	Botanique.	QUELET.....	T	Chimie organique.
CABANNES.....	T	Recherches physiques.	CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	CUVILLIER.....	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
BOULIGAND.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	JUNG.....	T	Pétrographie.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	TRILLAT.....	T	Chimie physique.
WYART.....	T	Minéralogie.	WIEMANN.....	T	Chimie (M. P. C.).
TEISSIER.....	T	Zoologie.	JACQUINOT.....	T	Physique (P. C. B.).
MANGENOT.....	T	Biologie végétale.	VASSY.....	T	Physique de l'atmosphère.
P. AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	M. PRUVOST.....	T	Géologie.
PIVETEAU.....	T	Géologie.	AMIEL.....	T	Chimie (P. C. B.).
ROCARD.....	T	Physique (E. N. Supérieure).	HOCART.....	T	Minéralogie.
H. CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. Supérieure).	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (P. C. B.).
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
FAVARD.....	T	Mécanique générale.	MAY.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	CHOQUET.....	T	Calcul différentiel.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (P. C. B.).	FELDMANN.....	T	Biologie (P. C. B.).
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	GUINIER.....	T	Physique (P. C. B.).
P. DRACH.....	T	Zoologie.	JOST.....	T	Biologie (P. C. B.).
KASTLER.....	T	Physique.	FORTET.....	T	Calcul des probabilités.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	SCHWARTZ.....	T	Méthodes mathématiques de la physique.
WURMSER.....	T	Biologie physico-chimique.	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
RIVIERE.....	T	Géologie (P. C. B.).	MALAVARD.....	T	Aviation.
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	BRELOT.....	T	Calcul différentiel.
LUCAS.....	T	Physique.	NORMANT.....	T	Chimie (P. C. B.).
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	BENARD.....	T	Chimie (P. C. B.).
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
MAX MORAND.....	T	Physique.	DUGUÉ.....	T	Statistique mathématique.
			GELOSO.....	T	Chimie (P. C. B.).
			SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
			ULRICH.....	T	Physiologie végétale.
			MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.

Secrétaire Général..... Ch. MONIER.



PREMIÈRE THÈSE.

Propriétés invariantes par convergence simple.

INTRODUCTION.

Il est du plus haut intérêt, dans maints problèmes et dans diverses branches des mathématiques, de connaître des règles permettant de s'assurer de l'invariance de telle propriété topologique ou métrique (ou mixte) relativement au passage simple à la limite.

On peut formuler le problème dans des termes très généraux : soit E un ensemble quelconque, K un espace topologique séparé et F une famille d'applications f de E dans K . Peut-on trouver des conditions (qui ne soient pas une tautologie) pour que dans l'espace $\mathcal{F}$ de toutes les applications de E dans K , F soit, au sens de la convergence simple, un ensemble fermé ?

Pour donner un sens précis à cette question, il convient de remarquer que supposer la famille F « donnée » ou « connue » revient à caractériser les applications f par quelques propriétés spécifiques, dont la nature peut être topologique, métrique ou mixte, ou quelconque ; ainsi on pourra reconnaître si f appartient à F ou non. Chercher les conditions générales pour que F soit fermé, c'est, dans la diversité des propriétés particulières, chercher ce qu'elles ont de commun et ce qui les rend susceptibles de rester invariantes par convergence simple.

Dans la théorie classique, on rencontre des ensembles de fonctions formant de très vastes familles « fermées » au sens de la convergence simple des suites, tel l'ensemble de fonctions mesurables ou l'ensemble

de fonctions de toutes les classes de Baire. Mais, du point de vue qui nous intéresse, ces familles ne peuvent servir d'exemple à notre problème du fait que la définition des fonctions appartenant à ces familles fait précisément intervenir l'obligation pour elles d'être des limites simples des suites de fonctions de même nature. En dehors de ces classes de fonctions, on connaît dans certains cas particuliers des critères et théorèmes sur la conservation de propriétés par convergence simple, mais peu de théorèmes généraux.

Sans vouloir en donner une énumération complète, mentionnons parmi les critères connus :

1° celui d'Ascoli [1] d'*égale continuité* (équivalent à la convergence uniforme);

2° celui d'Arzéla [1] sur les fonctions continues (équivalent à la convergence quasi-uniforme);

3° le critère d'appartenance d'une fonction de Baire à la classe α , donné par Lebesgue [1]. La méthode de Lebesgue a permis à Gaguaeff [1] de formuler un théorème sur la conservation de classe à la limite d'une suite convergente de fonctions de classe α ;

4° en généralisant le raisonnement de Gaguaeff, M. Alixiewicz [1] a donné les critères d'appartenance à la classe d'Hausdorff. C'est, à notre connaissance, le résultat le plus général connu dans ce domaine.

Tous ces critères, sauf le premier, font intervenir explicitement dans leur énoncé soit la convergence des suites, soit la fonction limite elle-même (ou les deux à la fois). Pour cette raison, ils pourront difficilement servir de point de départ d'une généralisation qui nous serait utile. Par contre, la condition d'*égale continuité* (ou d'équi-continuité) d'Ascoli caractérise exclusivement un ensemble de fonctions sans préciser la nature topologique de cet ensemble. Il se trouve que la condition d'Ascoli est suffisante pour affirmer que cet ensemble muni de la topologie de la convergence simple est fermé; cela revient à dire que la propriété commune des fonctions (continuité) se conserve à la limite par *convergence simple*. En fait, dans l'énoncé classique, la convergence est uniforme et les fonctions sont uniformément continues, mais ceci est en quelque sorte un accident qui tient uniquement

à la nature très particulière de l'espace compact dans lequel le théorème a été formulé. Si l'on transpose l'énoncé dans le cas général ⁽¹⁾, on voit que la convergence n'est pas nécessairement uniforme. (Il suffit par exemple de considérer la topologie discrète.)

Dès lors, il est naturel de se demander si un critère du type de celui d'Ascoli peut s'appliquer à des propriétés autres que la continuité ? Posé sous cette forme, le problème de caractériser des propriétés susceptibles d'être conservées par convergence simple apparaît comme lié à la possibilité de généraliser, dans un sens convenable, la notion de fonction continue. Parmi plusieurs voies qui s'ouvriraient dans cette direction, nous avons choisi — pour des raisons évidentes — celle qui conservait de la notion habituelle de fonction continue la propriété d'être entièrement déterminée dans un espace topologique si l'on se donne sa valeur sur un certain ensemble dénombrable.

Nous définissons donc formellement une classe de fonctions (déterminables D) partout définies si l'on se donne leur valeur sur un certain ensemble dénombrable appelé ensemble déterminant. On définit ensuite une sous-classe telle que la convergence sur cet ensemble dénombrable déterminant entraîne la convergence partout. Enfin, on considère la famille qui contient la limite des suites convergentes des fonctions ainsi définies. Nous démontrons alors que, si l'espace K des valeurs des fonctions f est métrique complet et à base dénombrable, la famille possède la structure d'un espace métrique complet à base dénombrable au sens de la convergence simple. Par conséquent, tout sous-espace complet est un ensemble fermé. Nous montrons encore que la réciproque de cette proposition est vraie : à savoir que tous les espaces de cette nature peuvent être obtenus à partir des familles d'applications qu'on vient de définir. C'est donc une solution du problème posé bien qu'une solution purement formelle. Pour obtenir une solution effective, il est nécessaire d'indiquer le procédé permettant de connaître la valeur d'une fonction déterminable D en un point quelconque étranger à l'ensemble dénombrable sur lequel, par hypothèse, sa valeur est connue. Pour une fonction continue au sens

⁽¹⁾ Voir BOURBAKI, *Topologie générale*, 1949, chap. X, § 1 à 4 et aussi 3, n° 7, proposition 14 et suiv.

habituel, il suffit évidemment de passer à la limite sur un ensemble dénombrable d'ouverts de plus en plus petits; l'opération réussit parce que, par définition, la valeur de la fonction sur chaque ouvert est d'autant plus voisine de sa valeur connue sur un point de l'ensemble dénombrable que cet ouvert est plus petit.

Par conséquent, pour aboutir à la généralisation cherchée, nous introduirons la notion de l'*ensemble essentiel* qui est l'image réciproque par l'application considérée d'un ouvert sur K (ensemble des valeurs des applications). Pour peu que K soit muni d'une structure uniforme convenable, la collection des ensembles essentiels pourra nous rendre les mêmes services que rend l'ensemble des ouverts pour les fonctions continues. Bien entendu, il faut pour cela que le recouvrement de E par les ensembles essentiels satisfasse à certaines conditions d'ailleurs fort simples. Une fois ces conditions remplies, l'ensemble des *ensembles essentiels* devient un *système essentiel* $\mathcal{E}$. Une application associée à un système essentiel $\mathcal{E}$ a évidemment toutes les apparences d'une généralisation de fonction continue. En particulier, cette application est entièrement déterminée si l'on se donne sa valeur sur un ensemble dénombrable dense sur E . Le passage à la limite nécessaire pour connaître sa valeur en un point quelconque se fait, non plus sur l'ensemble des ouverts mais sur une famille d'ensembles essentiels, qui forment un système essentiel $\mathcal{E}$.

La justification de ces développements se trouve dans les théorèmes qu'on peut traduire en disant que : « une famille équi-associée à un système essentiel est identique à la famille qu'on vient de définir au moyen d'un ensemble dénombrable déterminant ». En d'autres termes, toute famille équi-associée à un système essentiel possède, au sens de la convergence simple, la structure topologique d'un espace métrique complet, séparable, si K est métrique complet séparable, ou compact, si K est compact.

Or, il se trouve que *tous les espaces fonctionnels de cette espèce* peuvent être obtenus par les familles équi-associées à des systèmes essentiels. Par conséquent, *dans la limite précise des conditions du problème posé*, la nature des propriétés invariantes par convergence simple a été entièrement déterminée par des conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire des applications de E quel-

conques dans K métrique complet, séparable ou K compact. Admettons l'équivalence de deux expressions : « application associée à un système essentiel $\mathcal{E}$ » et « application continue au sens généralisé ».

Alors on peut résumer sous une forme condensée ces résultats obtenus en disant que *seules des* familles d'applications équi-continues au sens *généralisé*, peuvent engendrer les espaces fonctionnels métriques complets séparables (resp. compacts) *au sens de la convergence simple*.

La question reste ouverte pour les espaces plus généraux. Nous nous sommes cependant placés dans des conditions dont la généralité englobe les hypothèses habituelles de l'Analyse classique.

Il convient de souligner que *toutes* les propriétés métriques et topologiques ne sont pas automatiquement connues quand on se trouve en présence d'un espace fonctionnel métrique complet séparable ou compact au sens de la convergence simple. Mais, chaque fois qu'on est en présence d'un tel espace, on est sûr qu'il en existe au moins *une* propriété caractérisée par un système essentiel auquel les applications sont équi-associées. Par conséquent, c'est à l'étude des espaces fonctionnels munis de *plusieurs structures différentes* que les résultats auxquels aboutit ce travail pourraient peut-être fournir des moyens utiles d'investigation.

Dans le premier chapitre sont étudiés quelques aspects particuliers du problème : nous introduisons la notion d'ensemble essentiel en établissant un critère pour que la limite d'une suite d'applications quelconques soit continue en un point. La considération des oscillations fortes (habituelles) des applications permet d'obtenir quelques critères nouveaux, mais fournit, en général, seulement des conditions suffisantes. Une nouvelle oscillation (plus faible) est introduite pour les applications de Baire, grâce à une nouvelle définition de quasi-continuité. Cette oscillation faible permet de formuler les critères de conservation de classe de Baire en donnant des conditions nécessaires et suffisantes. En observant que les fonctions continues et quasi-continues ont ceci en commun que l'oscillation inférieure de continuité (oscillation faible) est nulle en chaque point, tant pour les unes que pour les autres, on montre que la limite d'une suite convergente de fonctions quasi-continue sur un parfait est ponctuellement discontinue

sur ce parfait. On étudie avec cette méthode les fonctions de première classe à propriété de Darboux. On montre, entre autre, que si de telles fonctions satisfont sur P parfait à la condition S de Banach, elles sont quasi-continues. Dans ce cas, la limite d'une suite convergente de telles fonctions est ponctuellement discontinue sur P . Les fonctions dérivées appartenant à la classe de fonctions étudiée, nous obtenons donc quelques propriétés nouvelles de fonctions dérivées. En particulier : la limite d'une suite de fonctions dérivées dont l'ensemble de discontinuité est dénombrable est de première classe.

Le chapitre II est consacré à l'étude des applications séparément continues définies sur un espace produit. Elles sont quasi-continues. D'abord les théorèmes connus de Baire, Hahn et Kempisty sont étendus à des espaces métriques complets. Nous démontrons ensuite pour n variables (produit topologique de n espaces facteurs) le théorème sur l'existence des réseaux denses de droites de continuité parallèles aux axes et formant des résiduels, théorème démontré par Baire pour deux variables.

La démonstration de ce théorème met en évidence la quasi-continuité que Baire a signalé déjà dans sa thèse. Cette notion n'a pas joué un rôle très important dans l'Analyse et cependant, son introduction semble logique du fait que dans les *espaces de Baire*, elle constitue une généralisation naturelle de la notion de continuité.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous donnons une réponse au principal problème exposé en grandes lignes au début de l'Introduction.

On trouvera sans peine la source des idées directrices de ce travail chez Baire et Lebesgue, mais principalement dans l'œuvre de M. Denjoy dont la généralité et la variété des méthodes, la profondeur des vues et des conceptions m'ont constamment servi de modèle, et à qui j'adresse ici mon admiratif hommage. J'exprime ma très grande reconnaissance à M. Montel, sur le conseil de qui j'ai entrepris ce travail et qui a bien voulu accepter la présidence du jury. C'est pour moi un agréable devoir d'exprimer à mon ami Choquet mes sincères remerciements pour les profonds conseils et la vaste érudition dont il m'a fait profiter le long de ce travail. Enfin, je remercie très vivement M. Favard qui a bien voulu, dès le début, s'intéresser à mes recherches.

CHAPITRE 1.

SUITES CONVERGENTES D'APPLICATIONS.

CRITÈRE DE CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LIMITES.

CRITÈRES DE CONSERVATION DE CLASSE DE FONCTIONS BORÉLIENNES.

L'étude qui fait l'objet de ce chapitre a principalement pour but les applications à l'Analyse. En dehors de quelques définitions et propriétés plus générales qui portent sur des *applications* quelconques, définies dans un espace topologique et prennent leur valeur dans un espace métrique, il sera question plus souvent des applications de Baire et quelquefois de fonctions mesurables B , définies dans un espace métrique séparable (resp. localement compact) et de suites dénombrables de ces fonctions. C'est donc le point de vue presque classique que nous allons adopter dans ce chapitre.

1. CRITÈRE DE CONTINUITÉ. — Soit E un ensemble quelconque, F un espace métrique et f une application de E dans F .

DÉFINITIONS. — On dira de façon générale, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'un sous-ensemble e de E est un ensemble essentiel $e(\varepsilon)$ de E relativement à f [ou, si aucune confusion n'est à craindre : $e(\varepsilon)$ est un ensemble essentiel de E] si l'oscillation de f sur $e(\varepsilon)$ est plus petite que ε ; on entendra par oscillation ⁽²⁾ le diamètre d de l'image de $e(\varepsilon)$ par f dans F , et l'on écrira $d[f(e)] < \varepsilon$.

⁽²⁾ BOURBAKI, livre III, chap. IX, p. 21 [1].

Soit E un espace *topologique* et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'applications de E dans F . Soit x un point de E , V un *voisinage* de x et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{V}_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ la boule ouverte dans F , de centre $f_n(x)$ et de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ désignons par

$$e_n(\varepsilon, x) = f_n^{-1}(\mathfrak{V}_n(\frac{\varepsilon}{2})) \cap V$$

l'ensemble restriction à V de la réciproque par f_n de la boule ouverte $\mathfrak{V}_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. On voit immédiatement que $e_n(\varepsilon, x)$ est un ensemble essentiel de E relativement à f_n . Formons pour tout $n \in \mathbb{N}$ les complémentaires $\complement e_n(\varepsilon, x)$ de $e_n(\varepsilon, x)$ par rapport à V , et, ensuite formons les intersections infinies,

$$e = \bigcap_n e_n(\varepsilon, x) \quad \text{et} \quad e' = \bigcap_n \complement e_n(\varepsilon, x).$$

Supposons que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en chaque point $x \in E$ vers un point $f(x) \in F$; l'espace F étant métrique posons $f = \lim f_n$; f est une application de E dans F . Sans faire aucune hypothèse nouvelle sur la nature des f_n , nous allons établir un critère de continuité de f à l'aide des ensembles e et e' .

α . Si f est continue au point x , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que, (les complémentaires $\complement e_n(e, x)$ étant toujours pris par rapport à V),

$$e' = \bigcap_n \complement e_n(\varepsilon, x) = \emptyset;$$

sinon, on trouverait un voisinage $\mathfrak{V}$ de $f(x)$ dans F , tel que tout voisinage V de x dans E contienne un point y pour lequel on a $f(y) \notin \mathfrak{V}$, ce qui est incompatible avec la supposition de f continue au point x ; par conséquent on a bien $e' = \emptyset$.

β . Réciproquement, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x

tel que l'intersection de toute sous-suite de complémentaires de $e_n(\varepsilon, x)$, $e' = \emptyset$ alors f est continue au point x .

Supposons que f soit discontinue au point x . Alors il existerait un $\varepsilon > 0$, une boule $\mathfrak{V}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, un voisinage $V' \subset V$ de x et un point $y \in V'$, tels qu'on ait $f(y) \notin \mathfrak{V}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et par conséquent $y \notin f^{-1}(\mathfrak{V}) \cap V$; mais comme $y \notin V'$, on a par définition $y \in \bigcap e_n(\varepsilon, x)$. D'autre part, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f , sur un espace métrique, donc séparé, suivant le filtre de Fréchet; par conséquent, à l'exclusion d'un nombre fini de n , on a $f_n(y) \in \mathfrak{V}$ et d'après la définition des ensembles essentiels, pour une infinité de n , $y \in \bigcap e_n(\varepsilon, x)$; relation équivalente à

$$y \in \bigcap_n e_n(\varepsilon, x) = e'.$$

Donc $e' \neq \emptyset$ contrairement à l'hypothèse; il s'ensuit que f est continue au point x , les deux propositions forment des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'application limite soit continue en un point.

Nous allons donc formuler un critère de continuité :

CRITÈRE DE CONTINUITÉ. — *Pour que la limite f d'une suite convergente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications d'un espace topologique E dans un espace métrique F soit continue en un point $x \in \varepsilon$, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que toute intersection infinie des complémentaires par rapport à V des ensembles essentiels [définis pour tout n par f_n , à partir des boules $\mathfrak{V}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$] soit vide.*

Avec les notations adoptées on peut traduire ce critère en désignant par M une partie infinie quelconque de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs, par la condition : pour tout $M \subset \mathbb{N}$,

$$e' = \bigcap_{n \in M} e_n(\varepsilon, x) = \emptyset.$$

Remarque I. — On observera que l'énoncé de ce critère de continuité ne suppose pas la convergence de la suite.

Remarque II. — Il est immédiat qu'en passant aux complémentaires et en appliquant la règle de De Morgan on peut formuler le critère de continuité un peu différemment.

Soit $f = \lim f_n$ une suite convergente de E topologique dans F topologique séparé.

CRITÈRE DE CONTINUITÉ. — *Pour que f soit contenue en x_0 , il faut et il suffit que pour tout ouvert ν contenant $f(x_0)$ et pour toute partie infinie M de N ,*

$$\omega = \bigcup_{n \in M} f_n^{-1}(\nu)$$

soit un voisinage de x_0 . Cependant sous cette forme directe et même un peu plus générale que celle du texte on voit apparaître moins bien le rôle des *ensembles essentiels* dont nous ferons un constant usage au cours de ce travail.

2. CRITÈRE DE CONTINUITÉ ET OSCILLATION. — On désigne par oscillation (BOURBAKI, VIII, livre III, chap. IX, p. 22) d'une application f d'un espace topologique E dans un espace métrique F , au point $x \in E$ le nombre $\omega[f, x] = \inf \delta[f(V)]$ où δ désigne le diamètre et V parcourt le filtre des voisinages de x dans E .

Considérons une suite convergente d'applications $f = \lim f_n$, de E dans F ; il n'existe pas en général de relation simple entre la suite des oscillations $\omega[f_n, x]$ des fonctions f_n en un point x , et l'oscillation $\omega[f, x]$ de la fonction limite en ce point. Même si $\lim \omega[f_n, x]$ existe, on a en général $\lim \omega[f_n, x] \neq \omega[f, x]$; on connaît l'exemple d'une fonction f discontinue limite de fonctions (f_n) continues; on a $\lim \omega(f_n; x) = 0$, pour tout x , et $\omega[f, x] \neq 0$ en tout point où f est discontinue.

D'autre part, l'exemple d'une suite de fonctions de deuxième classe de Baire qui convergent identiquement vers zéro, montre qu'on peut avoir pour tout x , $\lim \omega[f_n, x] = 0$ et $\omega[f, x] = 0$; soit en effet pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_n$ un ensemble dénombrable de points $a_i (i = 1, 2, \dots)$, partout dense sur $(0, 1)$; soit $(a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dénombrable de tels ensembles disjoints deux à deux; posons pour tout n , et pour tout $a_i \in (a_i)_n$, $f_n(x) = 0$ pour $x \neq a_i$ et $f_n(x) = 1$ pour $x = a_i$.

On a $\lim f_n = f \equiv 0$ et, par conséquent, en même temps, $\omega[f, x] = 0$ et $\lim \omega[f_n, x] = 1$ en tout point de $x \in (0, 1)$. Ces exemples montrent que la connaissance en chaque point des oscillations $\omega[f_n, x]$ d'une suite convergente de fonctions ne permet de rien conclure de très précis sur le comportement de la fonction limite.

Si par contre, au lieu d'*oscillation* on considère la distance entre les valeurs de la fonction f_n en deux points x_1, x_2 , arbitraires, on s'aperçoit d'abord, que cet écart $\lambda_n(x_1, x_2)$ tend toujours vers une limite déterminée pour une suite convergente, ensuite que si cet écart est petit pour f (fonction limite) il faut qu'il ait été petit pour une infinité de termes de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Mais nous avons déjà vu que les points, dont les écarts par rapport à un point donné, sont petits, forment un ensemble essentiel, ce qui a permis de formuler le critère général de continuité (voir § 4).

Il semble donc qu'une oscillation plus faible, définie par rapport à des ensembles essentiels devrait pouvoir fournir des indications plus précises sur la nature de la fonction limite; nous introduirons plus loin de telles oscillations.

Cependant, si l'on sait que la fonction f est limite d'une suite de fonctions dont les oscillations (habituelles, donc « fortes ») en chaque point tendent vers zéro, on peut raisonnablement supposer que f ne présentera pas de très grandes ou de très fréquentes discontinuités. Ainsi, on doit à G. Choquet ([1], p. 124) ce résultat, que « *pour que l'application limite f d'une suite convergente d'applications (f_n) d'un espace E localement compact sur un espace métrique F soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait E , il suffit qu'en tout point de E , $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega[f_n, x] = 0$.*

Précisons d'abord ce qu'il faut entendre par application ponctuellement discontinue.

DÉFINITIONS. — Soit E un espace de Baire (cf. Bourbaki pour définition), F un espace métrique, f une application de E dans F .

On dira que f est *ponctuellement discontinue* sur E si pour tout ouvert Ω sur E , la restriction de f à Ω possède un point de continuité dans Ω relativement à E . Or, E est un espace de Baire. Donc si f est ponctuellement discontinue sur E (ou sur un ensemble fermé ou

parfait $P \subset E$) l'ensemble des points de continuité de f est résiduel de E (resp. de P).

Voici un théorème conduisant à une condition suffisante moins restrictive que celle de M. Choquet :

THÉOREME 1. — *L'application limite f d'une suite convergente d'applications $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace localement compact E dans un espace métrique F est ponctuellement discontinue sur E , si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble des x tels que $\limsup \omega[f_n x] \geq \varepsilon$ est non dense sur E .*

En posant $\limsup \omega[f_n, x] = \omega(x)$ il est immédiat que la condition ci-dessus est équivalente à celle-ci : *Si $\omega(x)$ admet un résiduel de points de continuité sur E et s'annule en chacun de ces points, f est ponctuellement discontinue sur E .*

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\mu = \frac{\varepsilon}{3}$. D'après les conditions de l'énoncé, il existe un ouvert V sur E , tel que en tout point $x \in V$,

$$(1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega[f_n, x] < \mu;$$

l'espace E est un espace de Baire; il existe donc pour tout $\mu > 0$ une portion fermée $\pi \subset V$, un ensemble résiduel de π , $r(\pi)$ et un entier n_0 , tels que pour tout $n > n_0$ et tout $x \in r(\pi)$ ($\delta =$ distance sur F)

$$(2) \quad \delta[f_n(x), f(x)] < \mu.$$

L'ensemble de points de continuité de $\omega(x) = \sup_{n \rightarrow \infty} \omega[f_n, x]$ est un résiduel de E ; désignons par (α) les points communs à ce résiduel et à $r(\pi)$; ces points (α) forment un résiduel de π , et l'on a pour tout $\alpha \in (\alpha)$ et tout $n \geq n_0$, grâce à (2)

$$\delta[f_n(\alpha), f(\alpha)] < \mu.$$

Soit un quelconque $x \in \pi$; pour n suffisamment élevé et $> n_0$, on a les relations

$$\delta[f_n(x), f(x)] < \mu$$

et, avec l'aide de (1),

$$\delta[f_n(x), f_n(z)] < \mu;$$

les trois dernières inégalités conduisent à

$$\delta[f(x), f(\alpha)] < 3\mu = \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \pi,$$

ce qui prouve que f est ponctuellement discontinue sur E .

C. Q. F. D.

Remarque. — On pourrait aussi démontrer ce théorème en montrant, à partir de la relation (1) que le *critère de continuité* du paragraphe 4 est vérifié aux points $x = \alpha$. En d'autres termes il est immédiat qu'on a

$$e' = \bigcap_n \bigcup e_n(\alpha, \varepsilon) = \emptyset;$$

les ensembles essentiels $e_n(\mu, \alpha)$ et $e_n(\varepsilon, \alpha)$ étant définis à partir des voisinages de $f_n(\alpha)$ pour $n \geq n_0$.

5. OSCILLATION DE CONTINUITÉ, CRITÈRES RELATIFS AUX FONCTIONS DE BAIRE.

— DÉFINITION I. — Soit E métrique complet et F métrique séparable. Il y a équivalence entre la classe des applications de E dans F qui satisfont à la condition de Baire au sens large (resp. au sens restreint) (cf. Kouratowski [1]) et la classe des applications f telle que la restriction de f à un résiduel de E (resp. à un résiduel de tout parfait P de E) soit continue.

DÉFINITION II. — Soit $f(x)$ une fonction de Baire définie dans E , $P \subset E$ un ensemble parfait et E_P , l'ensemble résiduel maximal de P , tel qu'en chaque point de E_P , $f(x)$ soit connue relativement à E_P . Soit δ la distance définissant la métrique de F .

On désignera par *oscillation inférieure de continuité de f* relativement à P au point $\alpha \in P$, la limite inférieure de $\delta[f(x), f(\alpha)]$ quand x tend vers α en parcourant E_P ; on posera

$$\omega_c[f, \alpha]_P = \inf \delta[f(x), f(\alpha)] \quad (x \rightarrow \alpha, x \in E_P),$$

On pourra définir d'une façon analogue l'oscillation supérieure de continuité en posant

$$\bar{\omega}_c[f, \alpha]_P = \sup \delta[f(x), f(\alpha)], \quad (x \rightarrow \alpha, x \in E_P).$$

(Nous écrirons $\underline{\omega}^c$, resp. $\overline{\omega}^c$ en omettant l'indice P, quand aucune confusion n'est à craindre.)

Nous allons montrer que l'oscillation de continuité qui est une oscillation faible, est un outil plus fin que l'oscillation habituelle (forte), et permettra de ce fait d'établir certains critères nécessaires et suffisants pour la conservation de classe des suites d'application de Baire.

Nous aurons besoin dans ce qui va suivre d'une propriété de l'oscillation de continuité que nous énoncerons sans démonstration, sous forme d'un lemme.

Soit f une application de Baire de E dans F et $P \subset E$ un sous-ensemble fermé de E.

LEMME I. — Si, pour un nombre $k > 0$, il existe une portion π relativement ouverte de l'ensemble fermé P et un ensemble résiduel $r(\pi)$ de π , tels que pour tout couple de points $(x', x'') \in r(\pi)$, la relation

$$(A) \quad \delta[f(x'), f(x'')] < k$$

est vérifiée, alors pour tout point $\alpha \in \pi$ et tout point $x \in r(\pi)$ on a

$$(B) \quad |\delta[f(x), f(\alpha)] - \omega[f, \alpha]| < 2k.$$

Remarque I. — La validité du lemme repose sur le fait que l'intersection de deux résiduels n'est jamais vide. Dans le même ordre d'idée on pourrait définir (sur un espace *séparable*) une oscillation de continuité par rapport à un ensemble partout dense dans π et établir le lemme dans des conditions un peu moins restrictives.

Remarque II. — Les distances δ , $\underline{\omega}^c$, etc. dans un espace métrique F, sont des *nombre positifs*, par conséquent les notations $\delta + \omega$, $|\delta - \omega|$, etc. que nous allons utiliser dans la suite sont justifiées et ne prêtent pas à confusion.

Notations. — Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente d'applications de Baire de E métrique complet dans F métrique séparable. Posons $f = \lim f_n$. Précisons ensuite que dans les énoncés qui vont suivre, si P désigne un ensemble parfait de E, il faut entendre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\underline{\omega}^c[f_n, x]$, l'oscillation de continuité en x de la restriction de f_n à P. La distance sur F sera désignée par δ .

THÉOREME 2. — *Pour que l'application f , limite d'une suite convergente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de Baire ⁽³⁾ soit de première classe de Baire, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble parfait P , l'ensemble des x où*

$$\limsup \omega^c[f_n, x] \geq \varepsilon$$

soit non dense sur P .

Posons $\limsup \omega^c[f_n, x] =: \omega(x)$. Il est immédiat que l'énoncé précédent est équivalent à celui-ci.

Pour que $f = \lim f_n$ soit de première classe, il faut et il suffit que pour tout parfait P , $\omega(x)_P$ soit ponctuellement discontinue sur P et nulle en chacun de ses points de continuité.

Démonstration. — *Condition suffisante :* Pour $\varepsilon > 0$, soit un nombre positif $\mu < \frac{\varepsilon}{6}$. D'après l'énoncé du théorème, il existe pour tout $\mu > 0$ dans chaque portion de P une sous-portion π ayant la propriété suivante : pour tout $x \in \pi$, il existe un entier n fonction de x , $n(x)$ tel que

$$(1) \quad \omega_{n \wedge n(x)}^c[f_n, x] < \mu.$$

D'après le théorème de Baire et le théorème topologique de Denjoy ⁽⁴⁾ sur la convergence uniforme locale sur un résiduel, il existe une sous-portion $\pi' \subset \pi$, un ensemble $r(\pi')$ résiduel de π' et un entier n_0 tels que pour tout $x \in r(\pi')$ et tout $n \geq n_0$.

$$(2) \quad \delta[f_n(x), f(x)] < \frac{\mu}{3}.$$

E_P désignant comme auparavant l'ensemble résiduel maximal de P , tel que f soit continue relativement à E_P en chaque point de E_P , on sait que l'intersection $E_P \cap r(\pi')$ est un résiduel non vide de π' ; comme tout point de cette intersection est un point de continuité sur E_P , il existe une sous-portion de π' , $\pi'' \subset \pi'$, telle que [en posant $r(\pi'') = r(\pi') \cap \pi''$], pour tout couple de points $(x', x'') \in E_P \cap r(\pi'')$,

⁽³⁾ Au sens restreint.

⁽⁴⁾ [2], p. 599.

on ait

$$(3) \quad \delta[f(x'), f(x'')] < \frac{\mu}{3}.$$

Remarquons maintenant que les conditions du lemme 1 (p. 14) sont remplies sur le résiduel $E_p \cap r(\pi'')$ de π'' pour chacune des fonctions f_n , telle que $n \geq n_0$. En particulier, la relation (A) du lemme 1 s'écrira d'après (2) et (3) pour toute fonction f_n , $n \geq n_0$ et pour tout couple de points $(x', x'') \in E_p \cap r(\pi'')$,

$$(A) \quad \delta[f_n(x'), f_n(x'')] < \mu.$$

Soit α et β deux points arbitrairement choisis sur π'' . Écrivons la relation (B) du lemme 1 successivement pour le point α ,

$$(B) \quad |\delta[f_n(\alpha), f_n(x)] - \omega^c[f_n, \alpha]| < 2\mu$$

et pour β

$$(B) \quad |\delta[f_n(\beta), f_n(x)] - \omega^c[f_n, \beta]| < 2\mu,$$

où x est un point quelconque de $E_p \cap r(\pi'')$. Ces relations sont vérifiées pour tout $n \geq n_0$, donc aussi pour $n \rightarrow \infty$. Mais la relation (1) permet de majorer dans (B) les oscillations de continuité $\omega^c[f, \alpha]$ et $\omega^c[f, \beta]$ par μ , de telle sorte que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f_n(\alpha), f_n(x)] &< 3\mu, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f_n(\beta), f_n(x)] &< 3\mu, \end{aligned}$$

et comme $\lim f_n = f$ on aboutit à

$$\delta[f(\alpha), f(\beta)] < 6\mu < \varepsilon,$$

relation qui prouve que f est ponctuellement discontinue sur P .

Condition nécessaire : Avec les mêmes notations, f étant supposée ponctuellement discontinue sur P , il existe pour tout $\mu > 0$ une portion π de P satisfaisant à la double condition :

— pour tout couple de point $(x', x'') \in \pi$:

$$(1') \quad \delta[f(x'), f(x'')] < \frac{\mu}{3};$$

— il existe un ensemble $r(\pi)$ résiduel de π et un entier n_0 tels que pour tout point $x \in r(\pi)$ et tout $n \geq n_0$:

$$(2') \quad \delta[f_n(\cdot, x'), f(\cdot, x')] < \frac{\mu}{3}.$$

Les conditions du lemme 1 sont vérifiées sur le résiduel $r(\pi)$ pour chacune des fonctions f_n , telle que $n \geq n_0$. Par conséquent la relation (A) du lemme 1 s'écrit d'après (1') et (2') pour tout couple $(x, x'') \in r(\pi)$ et $n \geq n_0$,

$$(A) \quad \delta[f_n(x'), f_n(x'')] < \mu;$$

d'où, pour tout point arbitrairement choisi, $\alpha \in \pi$ la relation (B) du lemme 1 s'écrit

$$(B) \quad |\delta[f_n(\alpha), f_n(x)] - \underline{\omega}^c[f, \alpha]| < 2\mu,$$

relation où il faut supposer $x \in r(\pi)$ et $n \geq n_0$.

La quantité $\delta[f_n(\alpha), f_n(x)]$ tend pour $n \rightarrow \infty$ vers $\delta[f(\alpha), f(x)]$ et par conséquent, d'après (1'), peut être majorée par μ , à partir d'un certain entier fonction de α , $n(\alpha)$; la relation (B) devient alors

$$\frac{\omega^c}{n \geq n(\alpha)} |f_n, \alpha| < 3\mu < \varepsilon;$$

d'où l'on conclut que pour tout point $x \in \pi$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \underline{\omega}^c[f_n, x] < \varepsilon,$$

relation qui est équivalente à l'énoncé du théorème.

C. Q. F. D.

Remarque 1. — On peut remplacer dans ce théorème l'oscillation inférieure de continuité $\underline{\omega}^c$ par l'oscillation supérieure de continuité $\overline{\omega}^c$, ce que fait, par exemple, M. Choquet qui a démontré indépendamment et presque en même temps un théorème plus restreint à savoir que la condition (sur tout parfait) pour $\omega(x)$ d'être ponctuellement discontinue et nulle en ses points de continuité *suffisait pour la conservation de classe de la limite f d'une suite convergente de fonctions de première classe de Baire* (Motchane [2]). Mais il serait évidemment faux de remplacer $\underline{\omega}^c$ ou $\overline{\omega}^c$ par l'oscillation ordinaire : nous avons vu que la condition serait suffisante mais nullement nécessaire.

4. APPLICATIONS QUASI-CONTINUES. — La notion d'oscillation de continuité amène tout naturellement à considérer une classe d'applications qu'on désigne par *quasi-continues*.

Nous introduirons d'abord une définition générale de quasi-continuité, définition qui se réduit à celle donnée par Kempisty ([1], p. 186) pour les fonctions boréliennes définies dans un espace euclidien.

DÉFINITION. — Soit f une application d'un espace topologique E dans un espace métrique F . On dira que f est *quasi-continue* au point $x \in E$, si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ouvert Ω contenant x il existe un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, tel que

$$\delta[f(y), f(x)] < \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \Omega'.$$

Il est immédiat que si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert Ω' satisfaisant à la relation précédente et contenant x , alors f est continue en x .

Soit f une application de Baire d'un espace E métrique complet dans un espace F métrique séparable. Nous énoncerons sans démonstration quelques propriétés immédiates :

a. Si la restriction de f à un sous-ensemble fermé $P \in E$ est *quasi-continue en chaque point de P* (ou plus brièvement *quasi-continue sur P*) alors f est *ponctuellement discontinue sur P* . Il suffit d'ailleurs pour que f soit ponctuellement discontinue sur P , que l'ensemble A de points où f est quasi-continue soit partout dense sur P .

b. Si f , *ponctuellement discontinue sur P* , est quasi-continue en un point $x \in P$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tout ouvert contenant x , contient un point $y \in P$, où f est continue relativement à P et tel que $\delta[f(x), f(y)] < \varepsilon$.

La relation entre l'oscillation inférieure de continuité et la quasi-continuité ressort du théorème suivant :

THÉORÈME 3. — *Toute application de Baire, f de E métrique complet dans F métrique séparable, dont l'oscillation inférieure de continuité est nulle en chaque point de E est quasi-continue sur E .*

Démonstration. — Désignons par $\mathcal{E}$ le résiduel maximal de E , tel

qu'en chaque point de $\mathcal{E}$, f est continue relativement à $\mathcal{E}$. Soit un $\varepsilon > 0$, α un point quelconque de E et $\mathcal{V}_\varepsilon$ un voisinage fermé de α de diamètre ε .

D'après l'énoncé du théorème, on a $\omega^c[f, \alpha] = 0$ et, par conséquent il existe un point $x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{V}_\varepsilon$ tel que

$$(1) \quad \delta[f(\alpha), f(x)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, f étant continue en $x \in \mathcal{E}$, relativement à $\mathcal{E}$, soit $V(x)$ un voisinage de x , tel que pour tout couple de points $(x, x'') \in \mathcal{E} \cap V(x)$,

$$(2) \quad \delta[f(x'), f(x'')] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme en tout point $x \in \mathcal{V}(x)$, on a $\omega^c(x) \equiv 0$, il est immédiat que l'oscillation forte ω de f dans $V(x)$ est, grâce à (2) limitée par $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\omega[f]_{x \in V} < \frac{\varepsilon}{2};$$

cela prouve qu'il existe un point $\beta \in V$ tel que f soit continue pour $x = \beta$ relativement à E . De (1) et (2) on obtient pour $\beta \in V$,

$$\delta[f(\alpha), f(\beta)] < \varepsilon,$$

relation qui prouve la quasi-continuité de f en α . C. Q. F. D.

La réciproque est évidemment vraie : toute application de Baire ⁽⁵⁾ quasi-continue en chaque point de E , a son oscillation inférieure de continuité nulle en chaque point de E . En effet f est ponctuellement discontinue; désignons par $\mathcal{E}'$ l'ensemble de points de continuité de f relativement à E ; la relation évidente $\mathcal{E} \in \mathcal{E}'$ entraîne la proposition.

Donc, pour qu'une application de Baire ⁽⁵⁾ soit quasi-continue il faut et il suffit que son oscillation inférieure de continuité soit nulle en chaque point. Nous avons donc établi une équivalence entre deux propriétés des applications de Baire.

Cette équivalence va nous permettre une nouvelle définition de quasi-continuité, que nous allons adopter dorénavant :

DÉFINITION. — On dira qu'une application de Baire ⁽⁵⁾ f , de E métrique

(5) Au sens large.

complet dans F métrique séparable est quasi-continue, si en chaque point de E , l'oscillation inférieure de continuité de f est nulle.

Remarque importante. — Comparons la définition classique de la quasi-continuité de Volterra-Kempisty (p. 12) que nous désignerons par *quasi-continuité V.-K.* avec celle définie par le théorème 3, désignée *quasi-continuité* ($\underline{\omega}^c = 0$).

1° Si une application de Baire (de classe α quelconque) est quasi-continue V.-K. en chaque point d'un ensemble fermé (resp. parfait, sous-espace complet) alors f est quasi-continue [$\underline{\omega}^c = 0$], et *reciproquement*.

2° Si f (de classe α quelconque) est quasi-continue V.-K. en un point $x \in E$, f est quasi-continue [$\underline{\omega}^c = 0$] en ce point. *Mais la réciproque est fausse.*

3° Cependant si f est de première classe, la réciproque est vraie.

De ce qui précède on déduit immédiatement le théorème suivant, P étant un ensemble parfait quelconque sur E :

THÉORÈME 4. — *La limite f d'une suite convergente $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de Baire (⁵) quasi-continues sur P est ponctuellement discontinue sur P .*

Démonstration. — On a en tout point $x \in P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\underline{\omega}^c[f_n, x] = 0,$$

donc *a fortiori* pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\limsup_{x \in P} \underline{\omega}^c[f_n, x] = 0 < \varepsilon.$$

Par conséquent, d'après le théorème 2, f est ponctuellement discontinue sur P .

Remarque. — Kempisty ([1], p. 194) a démontré (par la méthode directe de Baire et de Lebesgue) un théorème plus restreint : *la limite d'une suite convergente de fonctions simultanément continues est ponctuellement discontinue* (f et g sont simultanément quasi-continues si f , g , et $f - g$ sont quasi-continues.) On voit donc que la restriction de Kempisty n'est pas nécessaire pour la validité du théorème.

COROLLAIRE. — *La limite d'une suite d'applications de Baire au sens restreint quasi-continue sur tout ensemble parfait est de première classe de Baire.*

Ainsi, parmi les fonctions de première classe de Baire, nous avons défini une sous-classe remarquable : fonctions quasi-continues sur tout ensemble parfait. La limite d'une suite de telles fonctions est de première classe de Baire. Les fonctions continues étant *a fortiori* quasi-continues, nous désignerons dorénavant par *la classe zéro de Baire*, la classe de fonctions f définie par la condition : $\omega^c[f] \equiv 0$ sur tout ensemble parfait.

3. LES SUITES DE FONCTIONS QUASI-CONTINUES. — Il n'est pas sans intérêt de montrer sur un nouvel exemple que dans l'évaluation de classe de fonctions, telles que $\overline{\lim}$ et $\underline{\lim}$ des suites de fonctions, la *continuité* et la *quasi-continuité* ont des propriétés strictement équivalentes.

Nous allons considérer pour simplifier l'exposé, définie sur un espace métrique complet E , une *suite* $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions numériques de classe zéro en notre sens (donc au plus quasi-continues), et nous allons déterminer la classe de $\overline{\lim} \varphi_n$ et $\underline{\lim} \varphi_n$ de cette suite en supposant que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur un résiduel de E .

THÉOREME 5. — *Si la suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions numériques de classe zéro (en notre sens) converge sur un résiduel R_E de E , alors $\overline{\lim} \varphi_n$ et $\underline{\lim} \varphi_n$ sont ponctuellement discontinues.*

Nous ferons la démonstration pour $\varphi = \overline{\lim} \varphi_n$, celle pour $\underline{\lim} \varphi_n$ est identique.

Pour ne pas compliquer les notations nous pouvons supposer que R_E est aussi un résiduel de continuité des φ_n et de φ .

Démonstration. — La suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur R_E et par conséquent, il existe des points de R_E autour desquels $\{\varphi\}$ converge uniformément sur R_E : il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe dans tout ouvert de E un ouvert Ω_ε et un n_ε entier, tels que la réunion des ensembles $\varphi_n(R_E \cap \Omega_\varepsilon)$ pour $n \geq n_\varepsilon$ ait un diamètre $\leq \varepsilon$. Comme chaque φ_n est quasi-continue, la réunion S des ensembles correspon-

dant $\varphi_n(\Omega_\varepsilon)$ a aussi un diamètre $\leq \varepsilon$. Et comme $\varphi(\Omega_\varepsilon) \subset \bar{S}$, l'oscillation de φ sur Ω_ε est bien $\leq \varepsilon$. Ceci prouve que φ est ponctuellement discontinue.

COROLLAIRE. — Si pour tout ensemble parfait $P \subset E$, la suite $\{\varphi_n\}$ converge sur un résiduel R_P de P , alors les fonctions $\overline{\lim} \varphi_n$ et $\underline{\lim} \varphi_n$ sont de première classe de Baire.

6. FONCTIONS QUASI-APPROXIMATIVEMENT CONTINUES. — Il est naturel d'introduire à côté de l'oscillation de continuité qui possède un caractère nettement topologique, une autre oscillation, également plus fine que l'oscillation forte (habituelle), mais ayant un caractère métrique.

Ayant en vue quelques applications à l'Analyse, nous n'étudierons pas ici cette question dans toute sa généralité, mais nous allons nous borner aux fonctions numériques de variables réelles, mesurables, définies sur la droite numérique. Il sera facile au lecteur de vérifier la validité de certaines propriétés sous des conditions moins restrictives. Nous ferons appel à la notion de continuité approximative (Denjoy [1]).

DÉFINITIONS. — Soit f une fonction mesurable L définie sur le segment $(a - b)$ de la droite numérique, et soit E l'ensemble des points x , où f est approximativement continue. On sait que $|(a - b) - E| = 0$. Soit $x = \alpha$ un point quelconque de $(a - b)$.

On désignera par *oscillation inférieure en mesure* de f au point α , la limite inférieure de $|f(x) - f(\alpha)|$ quand x tend vers α en parcourant E , et l'on posera

$$O[f, \alpha] = \liminf_{x \rightarrow \alpha, x \in E} |f(x) - f(\alpha)|.$$

On pourra définir d'une manière analogue l'*oscillation supérieure en mesure* et l'on posera

$$\overline{O}[f, \alpha] = \limsup_{x \rightarrow \alpha, x \in E} |f(x) - f(\alpha)|.$$

On dira qu'une fonction f est *quasi-approximativement continue en un point* $x \in (a - b)$, si en ce point $O[f, x] = 0$; on dira que f est *quasi-approximativement continue sur* $(a - b)$, si en chaque point $x \in (a - b)$, on a $O[f, x] = 0$.

On dira que f est *quasi-approximativement continue à droite* en α [resp. en $(a-b)$] si l'on a en α [resp. en chaque point de $(a-b)$]

$$O[f, \alpha^+] = \liminf_{x \rightarrow \alpha, x > \alpha, x' < \alpha, x' \in E} |f(x) - f(x')| = 0.$$

La définition de

$$O[f, \alpha] = \liminf_{x \rightarrow \alpha, x' < \alpha, x' \in E} |f(x) - f(x')| = 0$$

se comprend d'elle-même.

On dira enfin que f est *quasi-approximativement continue bilatéralement* en α si l'on a à la fois $O[f, \alpha^+] = O[f, \alpha^-] = 0$, on notera ici $O \pm[f] = 0$.

Comme toute fonction mesurable est approximativement continue sur une épaisseur pleine, il est immédiat qu'il suffit de modifier la valeur d'une fonction mesurable quelconque au plus sur un ensemble mince pour obtenir une fonction quasi-approximativement continue. Une fonction f quasi-approximativement continue n'est pas nécessairement de première classe de Baire, mais si f est de première classe de Baire, on a le théorème suivant :

THÉOREME 5 bis. — *Toute fonction de première classe de Baire, quasi-approximativement continue bilatéralement sauf aux extrémités de $(a-b)$ possède la propriété de Darboux.*

Pour la démonstration, nous avons besoin d'une propriété démontrée par Banach et Wojdylawski (publié par Zahorski [1], p. 6, lemme 7) concernant certains ensembles F_σ . Nous dirons avec Zahorski qu'un ensemble E du type F_σ remplit la condition M_0 si tout point de E est point d'accumulation bilatéral de E . Voici alors la propriété en question :

Aucun intervalle ouvert n'est la somme de deux ensembles F_σ disjoints non vides remplissant la condition M_0 .

On observera que pour établir la propriété de Darboux, la continuité quasi-approximative n'est nullement essentielle. Ce qui importe, c'est l'existence d'une certaine quasi-continuité (topologique ou métrique) établie à partir d'un ensemble partout dense sur un intervalle.

Démonstration. — Soit f de première classe de Baire, définie dans un intervalle ouvert i de la droite numérique et satisfaisant pour tout $x \in i$, à $\underline{O} \pm [f, x] = 0$. Si f n'est pas constant sur i , soit $x = \alpha$ et $x = \beta$, deux points quelconques de i , où $f(\alpha) = a$ et $f(\beta) = b$, avec par exemple $a < b$. Supposons maintenant que f ne possède pas de propriété de Darboux et soit c la valeur intermédiaire $a < c < b$ que f ne prend pas dans i . Désignons par E_1 l'ensemble des x tel que $f(x) < c$, et par E_2 celui où $f(x) > c$.

Aucun des deux ensembles n'est vide et d'après l'hypothèse, on a $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, et $E_1 + E_2 = i$; d'autre part, f étant de première classe de Baire, E_1 et E_2 sont du type F_σ et grâce à $\underline{O}[f, x] = 0$ pour tout $x \in i$ chacun d'eux remplit la condition M_0 . Nous avons obtenu une partition de l'ensemble ouvert i dans les conditions contraires à la propriété citée plus haut, donc f prend la valeur c et possède par conséquent la propriété de Darboux.

C. Q. F. D.

7. FONCTIONS DÉRIVÉES. — On sait que toute fonction f dérivée finie ou infinie d'une fonction continue, possède nécessairement les propriétés suivantes :

1° f est de première classe de Baire.

2° f possède la propriété de Darboux.

3° L'ensemble des x pour A et B quelconques. $E[A < f(x) < B]$ est soit vide, soit de mesure $|E| > 0$ (Denjoy).

Les deux premières propriétés définissent entièrement la nature topologique des fonctions dérivées (Choquet [1], chap. IV). Quant à la troisième propriété — métrique — il est facile de se rendre compte qu'elle est équivalente à la quasi-continuité approximative bilatérale (sauf aux extrémités) de f .

D'après les résultats du paragraphe 5, ces trois propriétés ne sont pas indépendantes. La propriété 3°, qui s'exprime par la condition $\underline{O}[f, x] = 0$ pour tout $x \in (a - b)$, jointe à 1° entraîne 2° (la propriété de Darboux). Nous remplacerons donc les trois propriétés ci-dessous par :

a. f est de première classe de Baire ;

b. f est telle que $\underline{O}[f, x] = 0$ pour tout x (f est quasi-approximativement continue).

8. FONCTIONS DÉRIVÉES ET FONCTIONS QUASI-CONTINUES. — Désignons par $\mathfrak{M}$ la classe de fonctions qui satisfont aux conditions *a* et *b* du paragraphe 7; cette classe comprend en particulier toutes les fonctions dérivées à valeurs finies ou infinies de fonctions continues. Désignons par E l'ensemble de points de discontinuité de f dans $(0-1)$ et par E_1 l'ensemble de points où la quasi-continuité de f est en défaut. On a évidemment $E_1 \subset E$.

Une fonction $f \in \mathfrak{M}$ étant par définition de première classe, l'ensemble de ses points de continuité est partout dense sur $(0-1)$; mais on sait (Choquet [1], p. 199) que l'image de ces points peut être non dense sur l'ensemble F représentatif de la courbe $y = f(x)$, même si $f(x)$ est une fonction dérivée. En d'autres termes, une fonction $f \in \mathfrak{M}$ n'est pas nécessairement quasi-continue, même si f est une dérivée, et par conséquent, en général, on a $E_1 \neq \emptyset$ et $E_1 \neq E$. Cependant, voici une condition suffisante pour que f soit quasi-continue :

THÉOREME 6. — *Pour toute fonction $f \in \mathfrak{M}$, la relation $|E| = 0$ entraîne $E_1 = \emptyset$.*

Démonstration. — Soit un point quelconque $x = \alpha$ dans $(0-1)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage de α , il existe un ensemble A de mesure positive situé dans ce voisinage, tel que pour tout $x \in A$, on ait $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$.

Mais comme $|E| = 0$ et $|A| > 0$, on a $A - E \neq \emptyset$ et en tout point $x \in A - E$, f est continue et satisfait à la précédente inégalité; donc f est quasi-continue en α , et α étant quelconque, on a $E_1 = \emptyset$.

En particulier, toute fonction dérivée dont l'ensemble de discontinuité est de mesure nulle est quasi-continue.

Considérons alors une suite de fonctions dérivées (f_n) convergente vers f , et telles que si E_n désigne l'ensemble de discontinuité de f_n , on ait pour tout n : $|E_n| = 0$.

D'après le théorème 4, la limite $f = \lim f_n$ est ponctuellement discontinue sur $(0-1)$. Nous avons obtenu ainsi un corollaire du théorème 6.

COROLLAIRE 1. — *La limite d'une suite convergente de fonctions dérivées sur $(a - b)$ dont l'ensemble de discontinuités est de mesure nulle, est ponctuellement discontinue sur le segment $(a - b)$.*

Cette propriété de fonctions dérivées (qui s'étend évidemment à toutes les fonctions de la classe $\mathfrak{M}$) n'est pas évidente *a priori*, surtout si l'on observe qu'une suite convergente de fonctions de première classe dont chacune a un nombre *fini* de discontinuités peut avoir comme limite une fonction totalement discontinue.

Le raisonnement qui a servi pour la démonstration du théorème 6 permet de préciser la nature de l'ensemble E quand celui-ci est non vide.

THÉOREME 7. — *Pour toute fonction $f \in \mathfrak{M}$, l'ensemble des points où la quasi-continuité est en défaut, s'il n'est pas vide, est de mesure positive.*

Donc, la relation $E_1 \neq \emptyset$ entraîne $|E| > 0$.

Démonstration. — Observons d'abord que l'ensemble E_1 , différence de deux ensembles boréliens, est borélien, donc mesurable. Supposons que l'on ait $|E_1| = 0$ sans que E_1 soit vide. Alors le raisonnement du théorème 6 montre immédiatement que pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve au voisinage de tout point α un point x où f est soit continue, soit quasi-continue et tel que $|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$; ceci entraîne $\omega^c[f, \alpha] = 0$.

C. Q. F. D.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où l'ensemble E de discontinuité de f est de mesure positive; cela n'entraîne évidemment pas que $E_1 \neq \emptyset$.

Exemple. — Soit P parfait, totalement discontinu de mesure positive, placé sur $(0-1)$; si u_n est le $n^{\text{ième}}$ intervalle contigu de P d'extrémités α_n et β_n , posons $f(x) = 0$ sur P, et sur les contigus :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \frac{1}{x - \alpha_n} & \text{pour } \alpha_n < x \leq \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}; \\ f(x) &= \sin \frac{1}{\beta_n - x} & \text{pour } \frac{\alpha_n + \beta_n}{2} \leq x < \beta_n. \end{aligned}$$

Il est immédiat que $f \in \mathfrak{M}$, $P \equiv E$ donc $|E| > 0$ et $E_1 = \emptyset$; f est quasi-continue.

Dans certains cas généraux où $|E| > 0$, on peut encore affirmer que f est nécessairement quasi-continue; une condition suffisante est la condition S de Banach ([1], p. 166). Voici cette condition établie primitivement par Banach pour les fonctions continues : *Une fonction mesurable B remplit sur un ensemble E la condition S si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$, tel que, pour tout sous-ensemble $A \subset E$ dont la mesure est inférieure à η , la mesure de l'image de A par f satisfasse à $|f(A)| < \varepsilon$.*

En posant comme auparavant f définie sur un segment $(a - b)$ de la droite numérique, E désignant l'ensemble de discontinuité de f , nous avons le

THÉOREME 8. — *Toute fonction $f \in \mathcal{M}$ qui satisfait sur E ($E > 0$) à la condition S de Banach est quasi-continue sur $(a - b)$. (Théorème sans objet si $|E| = 0$).*

Démonstration. — Désignons par c tout point x où f est continue dans le segment $(0-1)$. Supposons qu'en un point $x_0 \in E$, la quasi-continuité de f est en défaut. Il existe alors un nombre $\mu > 0$, tel que $\omega^c[f, x_0] \geq \mu$ et un intervalle i contenant x_0 , tel que, pour tout point $c \in i$ on ait

$$|f(x_0) - f(c)| > \mu,$$

relation qui reste évidemment valable pour tout intervalle i' satisfaisant à $x_0 \in i' \subset i$. Posons $\varepsilon < \frac{\mu}{2}$. En raison de la condition S remplie sur E, il existe un nombre $\eta > 0$ fonction de ε tel que si i' désigne un intervalle quelconque contenant x_0 de longueur inférieure à η , la relation évidente $\text{mes}(E \cap i') < \eta$ entraîne $\text{mes}[f(E \cap i')] \leq \varepsilon < \frac{\mu}{2}$. Donc, f remplissant la condition de Darboux et, l'image de $E \cap i'$ par f ayant un diamètre inférieur à $\frac{\mu}{2}$, il existe des points $x \in i'$ étrangers à E, et par conséquent, des points $x = c$, tels que

$$|f(x_0) - f(c)| < \mu,$$

ce qui contredit la première inégalité; il en résulte que $E_1 = \emptyset$.

C. Q. F. D.

Le corollaire semblable à celui qui suit le théorème 6 est immédiat.

COROLLAIRE 2. — *La limite d'une suite convergente de fonctions de classe $\mathfrak{N}$ qui satisfont (chacune sur son ensemble de discontinuités) à la condition $\bar{S}$ (à *ae* Banach) est ponctuellement discontinue sur $(a - b)$.*

Enfin, il résulte de la démonstration du théorème 8 que la fonction toujours positive ou nulle $\mu(x) = \underline{\omega}^e[f, x]$ appartient elle-même à la classe $\mathfrak{N}$, chaque fois que $f \in \mathfrak{N}$. Le cas est banal si $E_1 = \emptyset$, car alors $\mu(x) \equiv 0$. Nous supposons donc $E_1 \neq \emptyset$. On voit en effet que :

- 1° $\mu(x)$ est de première classe de Baire. Cela résulte du théorème 2;
- 2° $\mu(x)$ est quasi-approximativement continue [par conséquent, $\mu(x)$ possède la propriété de Darboux].

Remarquons que $\mu(x)$ (qu'on déduit de $f \in \mathfrak{N}$) est l'exemple d'une fonction de classe $\mathfrak{N}$, telle que $E \equiv E_1$. Il est intéressant de noter que tous les exemples donnés dans le Mémoire classique de M. Denjoy ([1], p. 211 et suiv.) de fonctions dérivées bornées prenant les deux signes dans chaque intervalle, sont construits avec l'aide de fonctions de classe $\mathfrak{N}$ (et même dérivées) *qui ne sont quasi-continues en aucun point où elles sont discontinues*; en d'autres termes, $E_1 \equiv E$. Nous en citerons le premier, où $E_1 \equiv E$, et où cet ensemble forme une épaisseur pleine du segment de définition de la fonction.

Considérons un ensemble de points $a_1, a_2, a_n, \dots$ répartis et denses sur $(a - b)$ et une série convergente à termes positifs u_n . On démontre que la fonction égale à

$$g(x) = \sum \frac{u_n}{\sqrt[n]{x - a_n}}$$

en tout point d'un ensemble A où la série converge, et à $+\infty$ sur son complémentaire possède les propriétés suivantes :

- $g(x)$ est approximativement continue en tout point où elle est finie;
- l'ensemble A où $g(x)$ est finie est une plénitude de $(a - b)$;
- l'ensemble où $g(x) = +\infty$ (les points $a_n, n \in \mathbb{N}$ et certains points voisins) qui est le complémentaire de A , est un résiduel de $(a - b)$;
- $g(x)$ est continue partout où $g(x) = +\infty$.

Par conséquent, la fonction $G(x) = e^{-g(x)}$ est comprise entre 0 et 1 ; elle est approximativement continue partout où $G(x) \neq 0$, et continue en un résiduel mince où $G(x) = 0$. C'est une fonction dérivée donc *a fortiori* $\in \mathfrak{N}$. Les points où $G(x) = 0$ étant *les seuls points de continuité*, la quasi-continuité est en défaut en tout point où $G(x)$ est positive, c'est-à-dire sur une épaisseur pleine. Donc, $|E| = (a - b)$ et $E \equiv E_1$. Remarquons aussi que si l'on pose $\mu(x) = \omega^c[G]$ on a $\mu(x) \equiv G(x)$ et μ ne remplit évidemment pas la condition S de Banach.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS SÉPARÉMENT CONTINUES.

L'étude d'application d'un espace-produit, continues séparément par rapport à chacune des coordonnées — applications séparément continues — se rattache assez naturellement aux questions traitées dans le précédent chapitre, notamment du fait que de telles applications sont *quasi-continues*.

Historiquement les fonctions de ce genre ont joué un rôle important dans l'Analyse, car on sait que des fonctions séparément continues de deux variables furent à l'origine des recherches de Baire sur la classification de fonctions.

Rappelons leurs principales propriétés. On sait depuis Baire [1] que :

— Toute fonction séparément continue de deux variables admet deux réseaux denses de droites, respectivement parallèles aux axes, telles qu'en chaque point de toute droite (appartenant au réseau) la fonction soit continue (réseau de droites de continuité.)

La question de l'existence des droites de continuité reste ouverte pour le cas de $n > 2$ variables (Motchane [1]).

Toute fonction séparément continue de trois variables (x, y, z) est ponctuellement discontinue; elle est ponctuellement discontinue sur toute surface continue d'équation $x = \varphi(y, z)$.

Les travaux ultérieurs ont montré que :

— Toute fonction séparément continue de n variables (n entier > 2) a des points de continuité sur tout hyper-plan perpendiculaire à l'un des axes (*a fortiori*, cette fonction est ponctuellement discontinue dans l'espace à n dimensions) (Hahn [4]). Une telle fonction est au plus de $n - 1$ classe de Baire (Lebesgue [1]).

— Toute fonction de n variables *séparément quasi-continue* est *quasi-continue* (*a fortiori* ponctuellement discontinue).

— Toute fonction séparément continue de n variables,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

est ponctuellement discontinue sur toute surface *séparément continue* de $n - 1$ variables telle que

$$x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Ces deux derniers résultats sont dus à Kempisty [4].

La question reste ouverte de savoir quelle est la surface

$$x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

la plus générale de $n - 1$ variables, telle qu'une fonction séparément continue de n variables y soit encore ponctuellement discontinue. Tous les résultats sont formulés relativement aux fonctions numériques boréliennes définies dans un espace euclidien R^n .

Il y aurait un certain intérêt à formuler ces propriétés pour les espaces plus généraux. Nous considérerons, pour tout n entier positif des produits finis d'espaces facteurs $X = \prod_{i \leq n} X_i$ où X_i , pour $i \leq n$ et X

sont des espaces métriques. Soit alors X_1 et X_2 deux espaces métriques et $f(x_1, x_2)$ définie sur $X_1 \times X_2$, à valeur dans un espace métrique quelconque. On sait que :

— Si $f(x_1, x_2)$ est continue par rapport à $x_1 \in X_1$, et de classe α par rapport à $x_2 \in X_2$, f est de classe $\alpha + 1$ au plus. (Kuratowski [2] pour le cas où X_2 est séparable; pour le cas général, Mongoméry [1]). On en déduit le théorème qui étend celui de Lebesgue aux espèces

métriques : *Toute application séparément continue d'un espace métrique $X = \prod_{i \leq n} X_i$ dans Y métrique est de classe $n - 1$ au plus.*

Pour pouvoir résoudre dans les espaces généraux les deux problèmes restés ouverts, nous allons d'abord étendre le théorème de Kempisty à ces espaces.

9. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — On désigne par $X = \prod_{i \leq n} X_i$ un espace métrique complet, produit fini d'espaces facteurs également métriques et complets, et par f une application de X dans Y métrique.

α . On dira que f est *séparément continue* dans X , si, pour tout $i \leq n$, l'application f de X_i dans Y est continue, les autres coordonnées restant constantes.

β . On dira que f est *ponctuellement discontinue* sur un sous-ensemble P de X , si la restriction de f à P possède au moins un point de continuité sur P .

γ . On dira que f est une *application de Baire* si pour tout ensemble fermé (resp. ouvert) $F \subset Y$, l'ensemble $A = \bar{f}^{-1}(F)$ possède la propriété de Baire. C'est-à-dire $A = G - P + Q$, où G est un ouvert et P et Q sont de première catégorie. Nous entendons la propriété de Baire au sens large, sauf mention contraire.

γ' . Une définition équivalente à γ , dans le cas, où l'espace des valeurs Y est séparable, résulte du théorème : *pour que f soit une application de Baire il faut et il suffit que f ait une restriction continue sur un $G_\delta = X - P$, où P est un ensemble de première catégorie (voir p. 13, § 5).*

δ . On dira qu'une application de Baire est *quasi continue en un point $x' \in X$* , si, G_δ étant l'ensemble défini dans γ' , et la distance entre deux points x, x' désignée par $\Delta(x', x)$ la relation $\Delta(x, x') \rightarrow 0, x \in G_\delta$, entraîne $\liminf \Delta[f(x), f(x')] = 0$.

On dira que f est *quasi continue en X* , si f est quasi continue en chaque point $x \in X$.

Il est immédiat que si f est quasi continue en tout point de X , f est ponctuellement discontinue sur X .

10. APPLICATIONS SÉPARÉMENT CONTINUES SUR UN ESPACE-PRODUIT. —
THÉORÈME 9. — *Toute application f séparément continue d'un produit fini d'espaces facteurs $X = \prod_{i \leq n} X_i$, métrique complet séparable dans un espace Z , métrique séparable, est quasi continue (donc ponctuellement discontinue) dans X .*

Il est clair que le théorème sera démontré par récurrence, si nous démontrons qu'une application f d'un produit de deux espaces métriques, complets, séparables $X \times Y$, dans un espace Z , métrique séparable, application continue dans X pour toute valeur de Y et quasi continue en Y pour toute valeur de X , est *quasi continue*.

Démonstration. — Toute application qui satisfait aux conditions du théorème est une application de Baire [Kuratowski (p. 308)]. Soit un point quelconque $p = x \times y$ de $X \times Y$ et $f(p) \in Z$. Pour tout $\varepsilon > 0$ soit $\mathcal{V}_\varepsilon$ la boule ouverte dans Z , de centre $f(p)$ et de diamètre ε . Posons

$$\bar{f}^{-1}(\mathcal{V}_\varepsilon) = A.$$

Nous savons que A est un ensemble de Baire; nous allons montrer que A est de deuxième catégorie dans $X \times Y$ en chacun de ses points. Supposons le contraire; dans ce cas A doit être de première catégorie dans un voisinage ν de l'un de ces points. Dans ce voisinage A doit être de première catégorie par rapport à X sur toute « parallèle à l'axe des X » sauf pour les parallèles dont les coordonnées y forment un ensemble au plus de première catégorie sur Y .

Or c'est impossible parce que ce dernier ensemble $\{y\}$ contient nécessairement un ensemble de deuxième catégorie, f étant quasi continue par rapport à y . Donc A est de deuxième catégorie en chacun de ses points. Soit $p \in X \times Y$ et ν un voisinage fermé de p . La restriction à ν de l'ensemble R résiduel de continuité de f , (R c'est l'ensemble G_δ de la définition γ' , p. 31), rencontre nécessairement la restriction de A à ν , qui est de deuxième catégorie (et n'est pas vide). Pour tout point $p' \in R \cap A$ appartenant à ν , on a $f(p') \in \mathcal{V}_\varepsilon$, ce qui entraîne $\inf \Delta[f(p), f(p')] = 0$ pour $p' \rightarrow p$, $p' \in R \cap A$, d'où le théorème.

Remarque. — Le théorème 9 peut être facilement généralisé. Pour cela on utilisera la propriété qu'un ensemble de première catégorie dans un espace-produit est de première catégorie sur chaque « droite parallèle à l'un des axes », si l'on néglige un ensemble de points qui se projette sur l'autre axe suivant un ensemble de première catégorie. Par conséquent relativement aux applications de Baire, le théorème suivant est immédiat, et sa démonstration identique à celle du théorème précédent, peut être omise :

THÉOREME 10. — *Toute application de Baire, f , séparément quasi continue de $X = \coprod_{i \leq n} X_i$ dans Z est quasi continue dans X .*

(Les espaces X_i , $i \leq n$ et X sont métriques complets séparables, Z métrique séparable. Pour les espaces euclidiens, théorème connu de Kempisty [1].)

COROLLAIRE. — *Toute application de Baire de $X \times Y$ dans Z , quasi continue dans X pour tout point $y \in Y$, et continue dans Y pour tout point $x \in X$, en négligeant un ensemble de première catégorie sur X , est quasi continue.*

Démonstration évidente en tenant compte de la remarque précédente.

11. QUASI-CONTINUITÉ. — Les propriétés des applications quasi continues mises en évidence par les précédents théorèmes conduisent à un théorème plus général qui peut être considéré comme équivalent à une définition de la quasi-continuité; nous l'énoncerons sans démonstration :

THÉOREME 11. — *Pour qu'une application de Baire définie dans un espace métrique complet prenant ses valeurs dans un espace métrique séparable, soit quasi-continue, il faut et il suffit que l'image réciproque de tout ouvert dans l'espace des valeurs soit un ensemble de deuxième catégorie en chacun de ses points.*

Remarquons que l'emploi des images réciproques dans les définitions des propriétés topologiques des applications, conduit d'une

façon naturelle à considérer le théorème 11 comme une définition de la quasi-continuité.

En effet, soit E et F deux espaces topologiques quelconques, Y un ouvert sur F , $X = \bar{f}^{-1}(Y)$, et O_E l'ensemble des ouverts de E .

On dit que f est continue sur E si pour tout $Y \subset F$ on a $\bar{f}^{-1}(Y) \subset O_E$; l'on pourra dire que f est *quasi continue* si pour tout $Y \subset F$, on a $\bar{f}^{-1}(Y) \cap O_E \subset O_E$.

Soit E un espace de Baire et F métrique. Pour que f soit une application de Baire il faut et il suffit que pour tout $Y \subset F$, $\bar{f}^{-1}(Y) = X$ soit un ensemble de Baire c'est-à-dire de la forme $G - P + R$, où G est ouvert et P et R de première catégorie, *l'un au moins des trois ensembles n'étant pas vide*. Par analogie, on donnera donc une définition de la quasi-continuité dans un espace de Baire (plus général que ceux du théorème 11) en disant que f est *quasi continue sur E* , si pour tout ouvert $Y \subset F$, on a $\bar{f}^{-1}(Y) = X = G - P + R$, avec $G \neq \emptyset$.

Remarque. — On ne peut pas étendre utilement les théorèmes précédents aux applications définies sur un espace X , produit topologique d'une infinité dénombrable d'espaces facteurs. Déjà Lebesgue [1], puis Lusin [1] ont fait observer que l'on peut définir une fonction totalement discontinue mais séparément continue sur l'espace des suites $(x^1, x^2, \dots, x^i, \dots)$.

Voici un autre exemple très simple construit par M. G. Choquet :

Posons sur l'espace produit $J^{\aleph_0}$, où $J = 0 \leq x \leq 1$, $y = 0$ pour tout point de la forme $(x^1, x^2, \dots, x^i, 0, 0, \dots)$ où toutes les coordonnées à partir d'un rang fixe sont nulles, et $y = 1$ partout ailleurs. La fonction y est séparément continue, mais totalement discontinue sur l'espace topologique $J^{\aleph_0}$.

12. LES FIBRES DE CONTINUITÉ DANS LES ESPACES-PRODUITS. — DÉFINITION.

— On dira pour tout $i \leq n$ (n entier) qu'un point $z \in \mathcal{Z} = \prod_{i \leq n} \mathcal{X}_i$ décrit une fibre (une droite dans les espaces euclidiens) *parallèle* à l'axe des $\mathcal{X}_i$ si la coordonnée z^i du point $z(z^1, z^2, \dots, z^i, \dots, z^n)$ parcourt l'espace $\mathcal{X}_i$, les autres coordonnées restant fixes.

On dira qu'une fibre (resp. droite) parallèle à l'axe des $\mathfrak{X}_i$ est une *fibre de continuité* d'une application f de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{Y}$ si, en chaque point de cette fibre, f est continue.

Nous allons montrer que le théorème connu de Baire sur les droites de continuité de fonctions de deux variables définies et prenant leurs valeurs dans un espace euclidien, séparément continues (Baire [1]) peut être étendu tant aux fonctions de $n > 2$ variables qu'aux fonctions définies dans les espaces plus généraux; plus précisément aux applications d'un espace-produit $\prod_{i < n} \mathfrak{X}_i$, métrique complet séparable dans un espace $\mathfrak{Y}$ métrique séparable.

Pour la démonstration, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Pour toute application f d'un espace-produit $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{V}$ métrique complet séparable dans $\mathfrak{Y}$ métrique séparable, f étant une application de Baire de classe $\leq \alpha$ relativement à x , quasi continue en x et continue en v , il existe un réseau de fibres de continuité de f parallèles à $\mathfrak{V}$. La projection de ce réseau sur $\mathfrak{X}$ est un résiduel de $\mathfrak{X}$.*

Démonstration. — Pour $\varepsilon > 0$, soit $\bigcup_m O_{\varepsilon, m} = \mathfrak{V}$ un recouvrement dénombrable de $\mathfrak{V}$ par des ouverts dont la borne supérieure des diamètres est $< \varepsilon$. Soit O_ε l'un de ces ouverts et $A_\varepsilon = f^{-1}(O_\varepsilon)$. D'après les théorèmes 10 et 11, l'ensemble A_ε est de deuxième catégorie en chacun de ses points. Désignons par A_x la projection de A_ε sur $\mathfrak{X}$, par D_ε l'ensemble des points de A_ε , qui sont des points de discontinuité de f d'oscillation $\geq 3\varepsilon$, et par D_x la projection de D_ε sur $\mathfrak{X}$. Les ensembles A_x et D_x sont des ensembles de Baire parce que f est de classe de Baire $\leq \alpha + 1$.

Je dis que D_x est au plus de première catégorie sur A_x . Supposons le contraire, à savoir que D_x est de deuxième catégorie sur A_x . Remarquons que toute coupe de A_ε par $v = \text{const.}$ contient des ouverts ⁽⁶⁾; soit $\omega \subset A_\varepsilon$ un ouvert relativement à la fibre $v = \text{const.}$

⁽⁶⁾ Cela résulte évidemment de la quasi-continuité de f par rapport à x en tout point $v \in \mathfrak{V}$. Il suffit cependant pour la démonstration, que les fibres $v = \text{const.}$ portant des ouverts soient partout denses sur $\mathfrak{V}$.

parallèle à $\mathcal{X}$. La projection ω_x de ω sur $\mathcal{X}$ appartient à A_x . Donc, supposer D_x de deuxième catégorie sur un ouvert de A_x est équivalent à supposer D_x dense et de deuxième catégorie sur un ouvert ω_x de $\mathcal{X}$, $\omega_x \subset A_x \subset \mathcal{X}$ ce qui revient encore à supposer que D_x contient un résiduel de $\overline{\omega}_x$.

Ceci posé, considérons un recouvrement dénombrable de $A_\varepsilon \cap (\omega_x \times \mathcal{V})$ par des pavés ouverts élémentaires $\omega_x \times \Omega_{i,n_1}$ où $\{\Omega_{i,n_1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement dénombrable ouvert de $\mathcal{V}$, et le diamètre de Ω_{i,n_1} , pour tout i , est $d[\Omega_{i,n_1}] < \frac{1}{n_1}$. Il est immédiat qu'il existe un indice i_1 , d'une part, et un ouvert ω'_x sur $\mathcal{X}$ satisfaisant à $\overline{\omega'_x} \subset \omega_x$ d'autre part, tels que la projection sur $\mathcal{X}$ des points de D_ε contenus dans le pavé $\omega'_x \times \Omega_{i_1,n_1}$ soit un résiduel de $\overline{\omega'_x}$.

De plus, grâce à la remarque faite plus haut, on peut supposer sans restreindre la généralité que la projection sur $\mathcal{X}$ des points de A_ε contenus dans le pavé $\omega'_x \times \Omega_{i_1,n_1}$ est identique à ω'_x .

Soit maintenant un point $z \in D_\varepsilon$, intérieur à $\omega'_x \times \Omega_{i_1,n_1}$. Dans tout voisinage de z , il existe un point p tel que pour tout point de A_ε on ait

$$\delta[f(p), f(z \in A_\varepsilon)] > 2\varepsilon.$$

Or, f étant quasi continue par rapport à x , il existe dans tout voisinage de p , et porté par la même fibre $\nu_p = \text{const.}$ parallèle à $\mathcal{X}$ qui passe par p , un ouvert ω_1 ⁽⁷⁾ de diamètre $d[\omega_1] < \frac{1}{n}$ tel que pour tout point $z' \in \omega_1$, on ait

$$(1) \quad \delta[f(z \in \omega_1), f(z \in A_\varepsilon)] > 2\varepsilon.$$

On choisira ω_1 tel que $\overline{\omega_1} \subset \omega'_x$. Désignons par $\omega_{1,x}$ la projection sur $\mathcal{X}$ de ω_1 et considérons le pavé ouvert $O_{1,n_1} = \omega_{1,x} \times \Omega_{i_1,n_1}$ de diamètre $d[O_{1,n_1}] < \frac{1}{n_1}$. Ce pavé satisfait aux conditions suivantes :

- α . La projection de $D_\varepsilon \cap O_{1,n_1}$ sur $\mathcal{X}$ est un résiduel de $\overline{\omega_{1,x}}$.
- β . La projection de $A_\varepsilon \cap O_{1,n_1}$ sur $\mathcal{X}$ est $\omega_{1,x}$.

⁽⁷⁾ Remarque analogue à ⁽⁶⁾. Il suffit que les fibres $\nu_p = \text{const.}$ portant des ouverts satisfaisant à (1) soient partout denses sur $\mathcal{V}$. Ces deux remarques seront utiles plus loin pour la démonstration du théorème 13.

γ . Chaque fibre d'abscisse $x \in \omega_{1,x}$ passe par deux points $(z, z') \in O_{1,n}$ qui satisfont à (1) et dont la distance sur $\mathfrak{Z}$ est $< \frac{1}{n_1}$.

Recommençons sur $A_\varepsilon \cap O_{1,n_1}$ le raisonnement que nous venons de faire relativement à $A_\varepsilon \cap (\omega_x \times \mathfrak{V})$. Nous obtiendrons un pavé ouvert $O_{2,n_2} = \omega_{2,x} \times \Omega_{i_2,n_2}$ où $\overline{\omega}_{2,x} \subset \omega_{1,x}$ et $\Omega_{i_2,n_2} \subset \Omega_{1,n_1}$ et par conséquent tel que $\overline{O}_{2,n_2} \subset O_{1,n_1}$, avec $d[O_{1,n_2}] < \frac{1}{n_2}$. Le pavé O_{2,n_2} satisfait en plus aux propriétés α , β et γ . Les deux premières permettent de recommencer sur O_{2,n_2} le raisonnement qui à partir de O_{1,n_1} a permis d'obtenir O_{2,n_2} . Nous pouvons donc continuer indéfiniment. Pour $n_k \rightarrow \infty$ (les espaces $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{V}$ étant complets) on obtient $d[O_{i_k,n_k}] \rightarrow 0$ et grâce à $O_{i_{k-1},n_{k-1}} \subset O_{i_k,n_k}$,

$$z_0(x_0, v_0) = \bigcap_k O_{i_k,n_k}.$$

Sur la fibre $x = \text{const.}$ parallèle à $\mathfrak{V}$, le point z_0 est, d'après γ , limite des points z' et z satisfaisant à (1), ce qui prouverait que f serait discontinue au point z_0 suivant la fibre $x_0 = \text{const.}$ parallèle à $\mathfrak{V}$, ce qui contredit la définition de f . De cette contradiction résulte que D_x est au plus de première catégorie sur $\mathfrak{X}$.

Il s'ensuit que la projection D_x de la réunion des ensembles D_ε relatifs à tous les $A_{\varepsilon,m} = \overline{f}(O_{\varepsilon,m})$ provenant du recouvrement dénombrable $\bigcup_m O_{\varepsilon,m} = \mathfrak{Y}$ est un ensemble de première catégorie sur $\mathfrak{X}$, et son complémentaire R_ε un résiduel de $\mathfrak{X}$. Chaque point de la fibre parallèle à $\mathfrak{V}$ d'abscisse $x \in R_\varepsilon$ est un point de continuité de f à 3ε près.

Donnons-nous une suite $\varepsilon_k \rightarrow 0$ et soit $(R_{\varepsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ la suite correspondante des résiduels : en tout point de toute fibre parallèle à $\mathfrak{V}$ d'abscisse $x \in R = \bigcap_k R_{\varepsilon_k}$, f est continue et la projection de ce réseau de fibres sur $\mathfrak{X}$ est un résiduel non vide $R = \bigcap_k R_{\varepsilon_k}$.

THÉORÈME 12. — *Pour toute application f séparément continue d'un*

espace-produit fini métrique complet séparable dans un espace métrique séparable, il existe pour tout espace facteur un réseau de fibres de continuité de f parallèles à cet espace facteur. Chaque réseau rencontre tout hyperplan qui lui est perpendiculaire suivant un résiduel de cet hyperplan.

Soit f définie sur $\prod_{i \leq n} \mathcal{X}_i$; posons $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$ avec $\mathcal{X} = \prod_{i \leq n-1} \mathcal{X}_i$ et $\mathcal{V} = \mathcal{X}_n$; nous désignerons un point de $\mathcal{Z}$ par $z(x, v)$ où $x \in \mathcal{X}$ et $v \in \mathcal{V}$.

D'après le théorème 9, $f(x, v)$ est quasi continue en x pour toute valeur de v et continue en v pour toute valeur de x . En outre, f est de classe de Baire $\leq n-2$ (Kuratowski [1], p. 284). On peut donc appliquer le lemme précédent, ce qui prouve le théorème pour l'espace facteur $\mathcal{X}_i$; en posant successivement pour $i=1, 2, \dots, n-1$, $\mathcal{X}_i = \mathcal{V}$, on achève la démonstration.

Désignons pour tout $i \leq n$ par R_i , le réseau de fibres de continuité parallèles à $\mathcal{X}_i$. On a le

COROLLAIRE. — *L'intersection $\cap R_i$ des réseaux de fibres de continuité est un résiduel de Z .*

15. EXTENSION DU THÉORÈME 12. — La remarque qui suit le théorème 9 (p. 33) permet d'étendre sans difficulté les résultats précédents.

Soit f une application d'un espace-produit $\mathcal{X} \times \mathcal{V}$ métrique complet séparable dans $\mathcal{Y}$ métrique séparable. Nous supposons (comparer le corollaire, p. 33) que :

- f est continue par rapport à v pour toute valeur de x ;
- f est quasi continue par rapport à x pour toute valeur de v , sauf pour un ensemble des v de première catégorie sur $\mathcal{V}$.

Dans ces conditions, nous avons d'abord la

PROPOSITION. — *L'application f est quasi continue sur $\mathcal{X} \times \mathcal{V}$.*

Nous omettons la démonstration qui est identique à celle du théorème 9; on utilisera la remarque de la page 33. Cette proposition permet d'énoncer un théorème plus général que le théorème 12.

THÉOREME 13. — *Pour toute application de Baire d'un espace-produit $\mathfrak{X} \times \mathfrak{V}$ métrique complet séparable dans $\mathfrak{Y}$ métrique séparable continue par rapport à φ pour tout x , et quasi continue par rapport à x , pour tout φ sauf pour un ensemble des φ de première catégorie sur $\mathfrak{V}$, il existe un réseau de fibres de continuité parallèle à l'espace facteur $\mathfrak{V}$. Ce réseau rencontre $\mathfrak{X}$ suivant un résiduel de $\mathfrak{X}$.*

Pour la démonstration, on utilisera la démonstration du lemme (p. 35) (le lecteur est prié de se reporter aux pages 35 et suiv.). On voit, en effet, que le théorème sera démontré si l'on prouve que les conclusions du lemme sont vraies pour les applications qui vérifient les conditions du présent énoncé.

Pour abréger les notations, nous désignerons par f_L l'application qui satisfait aux conditions du lemme et par f_T celle du présent théorème.

Démonstration. — La différence entre f_T et f_L consiste dans le fait que f_L est quasi continue par rapport à x pour tout φ , tandis que f_T est quasi continue par rapport à x pour tout φ , sauf pour un ensemble des φ de première catégorie sur $\mathfrak{V}$. Toutes les autres conditions étant identiques.

Il suffit donc de vérifier que seule la condition la plus faible (à laquelle obéit f_T) a été utilisée dans la démonstration du lemme. Ceci est immédiat et résulte des deux renvois ⁽⁶⁾ et ⁽⁷⁾ des pages 35 et 36. L'ensemble des φ , tel que f_T soit quasi continue par rapport à x pour $\varphi = \text{const.}$ est de deuxième catégorie sur $\mathfrak{V}$ donc *a fortiori*, partout dense sur $\mathfrak{V}$. Cela entraîne la validité des propriétés α , β et γ (p. 36) pour f_T , d'où il s'ensuit que les conditions du lemme s'appliquent sans changement à f_T , ce qui établit le théorème.

14. APPLICATIONS SÉPARÉMENT CONTINUES SUR UNE SURFACE PONCTUELLEMENT DISCONTINUE. — Sous les mêmes hypothèses et en conservant les mêmes notations, considérons dans l'espace $Z = X \times V$, où $X = \prod_{i \leq n-1} X_i$ et $X_n = V$, une application g de l'espace facteur X dans V ; nous écrirons donc $V = g(x)$. Pour tout $x \in X$ convenons de dire que le point $x \times g(x)$ (ou $x \times \varphi$) appartient à la surface définie par $\varphi = g(x)$ dans l'espace $X \times V$.

Soit f une application séparément continue de $Z = \prod_{i \leq n} X_i$ dans Y métrique séparable. Le précédent théorème sur les droites de continuité fournira une réponse au problème posé par Baire à savoir quelle est la surface la plus générale $v = g(x)$ (au sens de la classification de Baire) telle que f soit encore ponctuellement discontinue sur cette surface.

THÉORÈME 14. — *Toute application séparément continue f de $Z = V \times \prod_{i \leq n-1} X_i$ métrique complet séparable dans Y métrique séparable, est ponctuellement discontinue sur toute surface ponctuellement discontinue $v = g(x)$ définie sur $X = \prod_{i \leq n-1} X_i$ à valeur sur V .*

Ce théorème dans un espace euclidien a été démontré par Kempisty [1] dans le cas particulier où g est quasi continue.

La démonstration résulte immédiatement du théorème 11. Soit un résiduel R_x de X , tel qu'en chaque point de R_x , g soit continue relativement à X . Considérons d'autre part le réseau R_v de droites de continuité de f parallèles à l'espace-facteur (axe) V . Les droites R_v rencontrent R_x suivant un résiduel R de X . En tout point $x_0 \in R$, g est continue; l'ensemble $(x_0, \{v\} \in V)$ est une *droite de continuité* de f qui rencontre la surface g au point $v_0 = g(x_0)$. En tout point $(v_0, x_0) \in Z$ qui est un point de la surface $v = g(x)$, f est continue sur Z , et comme l'ensemble de ces points est partout dense sur la surface, f est ponctuellement discontinue sur $v = g(x)$.

C. Q. F. D.

(Concernant les théorèmes 12 et 13 dans les espaces euclidiens, voir Motchane [1].)

Remarque. — En un certain sens le domaine d'application du théorème 14 est le plus large possible.

Voici en effet un exemple d'une fonction f séparément continue mais totalement discontinue sur une surface totalement discontinue.

Soit dans le plan euclidien

$$f(x, v) = \frac{xv}{x^2 + v^2} \quad \text{pour } \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ 0 < v \leq 1 \end{cases} \quad \text{et } f(0, 0) = 0.$$

Il est évident que f est séparément continue. Définissons $v = g(x)$ totalement discontinue sur x :

$$\begin{aligned} v &= 1 && \text{pour } x \text{ rationnel,} \\ v &= 0 && \text{pour } x \text{ irrationnel.} \end{aligned}$$

En tout point x de l'intervalle $0 < x \leq 1$, l'oscillation de f au point x est

$$\frac{x}{x^2 + 1} > 0,$$

donc f est totalement discontinue sur $v = g(x)$.

CHAPITRE III.

ESPACES FONCTIONNELS COMPLETS ET COMPACTS AU SENS DE LA CONVERGENCE SIMPLE.

La plupart des questions traitées dans les précédents chapitres relèvent d'un problème qu'en termes volontairement vagues, nous avons décrit (*voir* l'Introduction) comme la recherche des conditions sous lesquelles diverses propriétés topologiques et métriques de fonctions se conservent par passage à la limite. Rappelons donc qu'en termes de la théorie classique des fonctions, le problème type se laisse formuler ainsi : *On considère une suite simplement convergente de fonctions, chacune pourvue d'un certain caractère (topologique, métrique ou mixte); dans quelles conditions peut-on affirmer que la fonction limite est pourvue du même caractère ?*

Il est cependant préférable de se placer dès le début à un point de vue plus général; plus précisément, nous nous proposons d'étudier le problème suivant : considérons un ensemble I quelconque, un espace K topologique, et soit $\mathcal{F}(I, K)$ l'ensemble de toutes les applications de I dans K . La topologie sur $\mathcal{F}$ est la *topologie de la convergence simple*;

c'est la topologie de l'espace produit K^I qui dépend essentiellement de celle de K .

Supposons maintenant particularisée une certaine classe $F \subset \mathcal{F}$ d'applications de I dans K ; il s'agira d'étudier les relations entre la nature topologique de F et les propriétés des fonctions f , éléments de F .

Inversement, en imposant à un sous-espace F de $\mathcal{F}$ une topologie ou une structure uniforme d'un type donné d'avance, par exemple d'être un espace complet ou compact, on cherchera les caractères généraux des applications compatibles avec la topologie et la structure imposées.

15. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Dans ce chapitre et sauf mention contraire, I désignera un ensemble d'indices, E un ensemble abstrait quelconque, K un espace séparé, $\mathcal{F}(I, K)$ ou $\mathcal{F}(E, K)$ l'ensemble des applications f de I , (resp. E) dans K . Nous aurons aussi à considérer l'application de $\mathcal{F} \times E$ dans K , qui fait correspondre à tout couple $f \in \mathcal{F}$, $x \in E$ le point $f(x) \in K$.

La coupe de $\mathcal{F} \times E$ par tout $x \in E$ est une application de $\mathcal{F}$ dans K que nous désignerons par $\tilde{x}(f)$ (où f parcourt $\mathcal{F}$) ou simplement par $\tilde{x}$; dans la suite, nous aurons à considérer l'espace de ces applications $\mathcal{F}[\mathcal{F}(E, K), K]$; il est évident que pour tout $x \in E$, $f \in \mathcal{F}$, on a $\tilde{x}(f) = f(x)$. On désignera par D un sous-ensemble dénombrable de E et ses éléments par a_j ($j = 1, 2, \dots$).

1° Familles déterminables D . — On dira qu'un sous-ensemble $F \subset \mathcal{F}(E, K)$ d'application f de E , dans K est *déterminable* D si pour tout couple d'applications $f_1 \in F$, $f_2 \in F$ la relation $f_1 = f_2$ en tout point de D entraîne $f_1 \equiv f_2$ en tout point de E .

On dira aussi que D est un *ensemble déterminant* de la famille F .

2° Familles continûment déterminables D . — On dira que F déterminable D , est *continûment déterminable* D si pour toute suite ⁽⁸⁾

⁽⁸⁾ Il aurait été intéressant également de formuler ces définitions en termes de filtres et non de suites. Cependant, la définition du texte suffit, étant donné que nous n'aurons affaire qu'aux espaces, où le filtre des voisinages de chaque point possède une base dénombrable.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et tout $f \in F$, chaque fois que la suite (f_n) converge vers f en tout point $\alpha_j \in D$, la suite converge vers f en tout point $x \in E$.

3° *Familles continûment déterminables D et closes.* — On dira qu'une famille F continûment déterminable D est *continûment déterminable D et close*, si toute suite $(f_n) \subset F$ qui converge en chaque point $x = a_j \in D$ converge sur E vers une application $f \in F$.

16. STRUCTURES TOPOLOGIQUES. — Interprétons topologiquement les deux premières définitions du paragraphe 15. Remarquons d'abord que la topologie sur $\mathcal{F}(E, K)$ étant celle de K^E , et K étant supposé séparé, $\mathcal{F}$ est séparé. Nous supposons désormais que dans K , tout point a une base dénombrable de voisinages, et nous dirons alors que K satisfait à la « condition A ».

Soit $F \subset \mathcal{F}$ une famille (un sous-ensemble) *déterminable D* d'applications $f \in \mathcal{F}$. Cela veut dire qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subset E$, tel que la projection de K^E sur le sous-espace K^D soit biunivoque sur F .

Supposons F *continûment déterminable D*. Désignons par f_D tout point de K^D (c'est-à-dire la projection de f sur K^D) et par φ la restriction à F de l'application « projection de K^E sur K^D ». Si l'on écrit $f_D = \varphi(f)$, l'application φ est continue, comme fonction coordonnée d'un espace produit pour la topologie produit.

D'autre part φ^{-1} est aussi continue car la convergence d'une suite sur K^D , $(f_{D,n}) \rightarrow f_D$ entraîne la convergence sur K^E de $(f_n) \rightarrow f$ avec $f_D = \varphi(f)$ en vertu de la définition même d'une famille continûment déterminable D . Par conséquent, φ étant biunivoque et bicontinue est un homéomorphisme. Nous venons de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathcal{F}(E, K)$ l'espace muni de la topologie de la convergence simple ⁽⁹⁾ des applications f de E quelconque dans K séparé,*

(⁹) Lorsque K est un espace topologique quelconque (uniformisable ou non), on dit encore (par abus de langage) que la topologie produite sur K^E est la topologie de la convergence simple (BOURBAKI, Livre III, chap. X, § 1, n° 3).

satisfaisant à la « condition A » et F un sous-espace de $\mathfrak{F}$. Si D est un sous-ensemble dénombrable de E la condition nécessaire et suffisante pour que F soit continûment déterminable D est que l'application de projection de F dans K^D soit une homéomorphie.

Le théorème qui va suivre va mettre en évidence de larges classes de familles continûment déterminables D .

Soit I un ensemble d'indices, et pour tout $i \in I$, K_i un espace séparé.

THÉOREME 15 (relatif aux structures topologiques). — Si F est un sous-espace à base dénombrable de l'espace $\mathfrak{F}_I = \prod_{i \in I} K_i$, produit d'espaces topologiques séparés, alors il existe un ensemble dénombrable $D \subset I$, tel que l'opération de projection de F sur $\mathfrak{F}_D = \prod_{i \in D} K_i$ soit une homéomorphie ⁽¹⁰⁾.

Démonstration. — Si F est une base dénombrable, on peut remplacer cette base par une autre dont chaque élément est la trace sur F d'un pavé ouvert (ensemble élémentaire) de $\mathfrak{F}_I$, $\omega = \prod_{i \in I} \omega_i$, où $\omega_i = K_i$, sauf pour un nombre fini d'indices.

En effet, pour tout ouvert $\Omega \subset F$ et tout recouvrement ouvert de Ω , il existe un sous-recouvrement dénombrable. Or, tout Ω possède un recouvrement strict par des restrictions à F de pavés ouverts; donc tout Ω possède un tel recouvrement strict dénombrable. Cela est vrai pour tout ouvert de la base de F , donc on peut remplacer cette base par l'ensemble dénombrable des restrictions à F des pavés ouverts. C'est la base cherchée $\{\omega_n\}$ ou $\omega_n = \prod_{i \in I} \omega_{i,n}$. Pour chaque n il y a un ensemble fini d'indices $i \in I$, tels que $\omega_{i,n} \neq K_i$. Il est immédiat que l'ensemble D de ces indices i est l'ensemble dénombrable cherché.

⁽¹⁰⁾ Tous les théorèmes et propositions des paragraphes **16–18** admettent des démonstrations analytiques que le lecteur retrouvera sans difficulté. Je dois à M. Choquet la suggestion de remplacer ces démonstrations par les interprétations géométriques qui rendent presque intuitives certaines des propriétés énoncées.

En effet, la projection d'un pavé ouvert ω_n dans $\mathfrak{F}_D \neq \prod_{i \in I} K_i$ est un ouvert de $\mathfrak{F}_D$ et de plus, les projections de ω_n et de $\bigcap \omega_n$ sont disjointes. Par conséquent, la projection de F sur $\mathfrak{F}_D$ est une application bi-univoque et qui transforme tout ouvert de F en ouvert de $\text{proj. } F$; c'est donc une homéomorphie.

Cas particulier. — Posons $I \equiv E$ et pour tout $i \in I$, $K_i \equiv K$; on a $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}(E, K)$ et $\mathfrak{F}_D$ est homéorphe à K^D . Si $F \subset \mathfrak{F}$ est à base dénombrable, on vérifie sans peine que la famille F des applications f de E dans K est continûment déterminable D.

Interprétons la définition 3 du paragraphe 16. Nous supposons à nouveau que K satisfait à la « condition A ».

Soit F une famille continûment déterminable D et close. Cela veut dire (en désignant par φ la restriction à F de l'application « projection de K^E sur K^D ») que l'image réciproque par φ de toute suite qui converge sur K^D est une suite qui converge vers un $f \in F$. Mais $\varphi(f)$ et $f_D = \lim f_{D,n}$ coïncidant dans K^D sont identiques dans K^E , donc $\lim \varphi^{-1}(f_{D,n}) = f \in F$ et $\varphi(f) = f_D$. La dernière relation indique que la projection de F sur K^D est fermée et φ est une homéomorphie.

Inversement, si φ est une homéomorphie et F est fermé, il est immédiat que $\lim f_{D,n} \rightarrow f_D$ entraîne, en posant $\varphi^{-1}(f_{D,n}) = f_n$ et $\varphi^{-1}(f_D) = f \in F$, $\lim f_n = f \in F$. Donc, F est continûment déterminable D et close. Nous avons la

PROPOSITION 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que F soit continûment déterminable D et close est que la projection de F sur K^D soit fermée et que l'opération φ de projection soit une homéomorphie. L'ensemble F est alors fermé dans K^E .*

17. STRUCTURES UNIFORMES. — Passons aux structures uniformes. Supposons pour tout $i \in I$, K_i métrique (satisfaisant donc à la « condition A »). Nous avons le

THÉOREME 16. — *Soit $\mathfrak{F} = \prod_{i \in I} K_i$ un espace-produit uniforme*

d'espaces uniformes métriques. Si $F \subset \mathcal{F}$ est un sous-espace uniforme métrisable, il existe un sous-ensemble dénombrable $D \subset I$, tel que l'opération de projection φ de F sur $\prod_{i \in D} K_i$ soit un isomorphisme des structures uniformes.

Démonstration. — Le sous-espace $F \subset \mathcal{F}$ étant métrisable, admet une base dénombrable d'entourages, que l'on peut désigner pour tout n entier par $W_{\frac{1}{n}}(i_1, i_2, \dots, i_p)$ tels que les projections de tout ensemble $X \subset W_{\frac{1}{n}}(i_1, i_2, \dots, i_p)$ sur les espaces K_{i_k} ($k = 1, 2, \dots, p$) soit de diamètre $\leq \frac{1}{n}$. L'ensemble D de tous les indices qui figurent dans les entourages est dénombrable; c'est l'ensemble cherché. Considérons la projection de F sur $\mathcal{F}_D = \prod_{i \in D} K_i$. La fonction projection est uniformément continue. Il est immédiat que la fonction inverse $(\text{proj})^{-1}$ est aussi uniformément continue : en effet, pour tout $W_{\frac{1}{n}}(i_1, i_2, \dots, i_p)$ soit $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_p}$, les entourages dont le diamètre de projection sur K_{i_k} pour tout k soit $\leq \frac{1}{n}$; alors, pour tout couple de points $(x, y) \in \mathcal{F}_D$ voisins d'ordre $V_{i_1}, V_{i_2}, \dots, V_{i_p}$, les points $(\text{proj } \bar{x}, \text{proj } \bar{y})$ sont voisins d'ordre

$$W_{\frac{1}{n}}(\text{proj } \bar{x}, \text{proj } \bar{y}) \in W_{\frac{1}{n}}(i_1, i_2, \dots, i_p)$$

(car on retrouve sur $\mathcal{F}_D$ et sur $\mathcal{F}$ les mêmes indices i_k en nombre fini). Donc F et la projection de F sur $\mathcal{F}_D$ sont isomorphes.

C. Q. F. D.

Cas particulier. — Revenons à l'espace $\mathcal{F}(E, K)$ en posant pour tout $i \in I$, $K_i = K$ et $I \equiv E$. Supposons, de plus K métrique *complet*. L'espace $\mathcal{F}$, muni de la structure uniforme de la convergence simple est complet.

Il résulte donc de ce qui précède que :

a. Si F constitue une famille continûment déterminable D et close,

la structure uniforme de la convergence simple de F est celle d'un espace complet puisque d'après la proposition 2 l'ensemble F est fermé dans $\mathcal{F}(E, K)$. Toutefois on ne peut affirmer que F soit métrisable.

b. Si $F \subset \mathcal{F}$, muni de la structure uniforme de la convergence simple est métrique complet, F est fermé et (théorème 16) il existe un ensemble déterminant D tel que la famille d'applications $f \in F$ est continûment déterminable D et close.

Si K est compact, les conclusions *a* et *b* s'appliquent sans changement quand on remplace « F complet » par « F compact »; toutefois on peut alors, dans l'énoncé *a* affirmer que F est alors métrisable puisque homéomorphe à un espace métrique compact.

Définissons une métrique sur F , compatible avec la convergence simple sur D . Si δ désigne la distance sur K (supposé métrique), on définira la distance de deux points $(f_1, f_2) \in F$ par l'expression

$$(1) \quad d(f_1, f_2) = \sum \frac{1}{2^j} \frac{\delta[f_1(a_j), f_2(a_j)]}{1 + \delta[f_1(a_j), f_2(a_j)]},$$

somme étendue sur tous les points $a_j \in D$.

C'est désormais la métrique que nous prendrons sur toute famille déterminable D .

Les conclusions *a* et *b* fournissent une réponse au problème posé au début du chapitre, bien qu'une réponse encore formelle : il nous manque en effet (les fonctions continues mises à part) une règle générale pour reconnaître si une famille est « déterminable D », ou continûment déterminable D et close ou non.

18. CAS DE K SÉPARABLE (A BASE DÉNOMBRABLE). — Comme nous allons le voir plus loin, si l'espace métrique complet K est séparable, toute famille F , continûment déterminable D et close, se laisse caractériser effectivement par des conditions simples. Au préalable, nous allons établir deux lemmes, qui nous seront utiles dans la suite.

LEMME 1. — Si K est séparable et si F est continûment déterminable D , l'espace $F \subset \mathcal{F}$ est séparable.

C'est immédiat : il suffit de remarquer que D étant dénombrable

et K séparable, K^b est séparable et F et sa projection sur K^b sont homéomorphes,

C. Q. F. D.

On désigne généralement (BOURBAKI Livre III, chap. V, § 1) par $\mathcal{F}[\mathcal{F}(E, K), K]$ ou $\mathcal{F}(\mathcal{F}, K)$, l'espace de toutes les applications de $\mathcal{F}(E, K)$ dans K . Considérons un sous-espace de l'espace précédent que nous désignerons par $\mathcal{X}(F, K)$ et qui est l'espace d'applications de l'espace F dans K . Une application de F dans K (un point de $\mathcal{X}$) sera désignée (voir *loc. cit.*) par $\tilde{x}(f)$.

Le second lemme précise la nature de l'espace $\mathcal{X}$ quand K est séparable.

Rappelons les hypothèses : on suppose F muni de la structure uniforme de la convergence simple, métrique, complet (donc F constitue une famille continûment déterminable D et close, K est métrique complet.

LEMME 2. — *Si K est séparable, $\mathcal{X}$ est métrisable et séparable.*

D'après le lemme 1, F est séparable. Soit $F' \subset F$ un sous-ensemble dénombrable dense dans F . Si δ désigne la distance sur K , on voit que l'on peut métriser $\mathcal{X}$ par la formule

$$\sum \frac{1}{2^n} \frac{\delta[\tilde{x}_1(f_n), \tilde{x}_2(f_n)]}{1 + \delta[\tilde{x}_1(f_n), \tilde{x}_2(f_n)]},$$

où $f_n \subset F'$, $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ qui est évidemment un *écart fini* sur $\mathcal{X}$, est une distance sur $\mathcal{X}$, à savoir que $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0$ entraîne $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$. Cela résulte du fait que $\tilde{x}_1(f_n) = \tilde{x}_2(f_n)$ pour tout $f_n \subset F'$, entraîne $\tilde{x}_1(f) = \tilde{x}_2(f)$ pour tout $f \subset F$: en effet sur K on a

$$\tilde{x}_1(f_n) = f_n(x_1) \quad \text{et} \quad \tilde{x}_2(f_n) = f_n(x_2),$$

d'où

$$\lim f_n(x_1) = \lim f_n(x_2) = f(x_1) = f(x_2)$$

qui établit $\tilde{x}_1(f) = \tilde{x}_2(f)$ et la métrique sur $\mathcal{X}$. Mais $\mathcal{X}$ étant métrique complet au sens de la convergence simple, si l'on pose $\mathcal{X} \equiv F$ dans le précédent lemme, K étant séparable, $\mathcal{X}$ l'est aussi ce qui achève la démonstration.

19. SYSTÈMES ESSENTIELS D'ENSEMBLES. FAMILLES D'APPLICATIONS ÉQUI-ASSOCIÉES A DE TELS SYSTÈMES. — Conservons les mêmes notations. Désignons par I un ensemble quelconque d'indices (en général non dénombrable) et par N l'ensemble des entiers positifs. E est un ensemble quelconque, et K un espace métrique.

DÉFINITION 1. — Pour tout $i \in I$ et tout $n \in N$, désignons par $e(n, i)$ un sous-ensemble éventuellement vide de E .

On dira qu'une famille d'ensembles $e(n, i)$ constitue un *système essentiel* $\mathcal{E}$ sur E ou (si aucune confusion n'est à craindre) un *système essentiel* $\mathcal{E}$, si :

a. Pour tout $n \in N$,

$$\bigcup_{i \in I} e(n, i) = E.$$

b. Pour tout $n \in N$, il existe un sous-ensemble dénombrable $I_n \subset I$ tel que, si l'on pose

$$s(n) = \bigcup_{i \in I_n} e(n, i),$$

la réunion $r(n)$ des $e(n, i)$ qui rencontrent $s(n)$ est identique à E .

On dit aussi que tout ensemble $e(n, i) \in \mathcal{E}$ est un *ensemble essentiel*.

DÉFINITION 2. — On dira qu'une famille F d'applications de E dans K métrique est équi-associée au système essentiel $\mathcal{E}$ si pour tout $i \in I$, tout $n \in N$ et tout $f \in F$, on a

$$[\text{oscillation de } f \text{ sur } e(n, i)] \leq \frac{1}{n}.$$

Nous entendons par cette oscillation le diamètre δ de $f[e(n, i)]$.

En particulier, la famille $\mathcal{F}$ de toutes les applications f qui vérifient toutes ces inégalités constitue une famille équi-associée à $\mathcal{E}$.

THÉORÈME 17. — *Pour toute famille F équi-associée à un système essentiel $\mathcal{E}$, il existe un sous-ensemble dénombrable $D \subset E$ indépendant de F tel que F soit continûment déterminable D .*

Démonstration. — Considérons pour tout $n \in N$, l'expression de

$$s(n) = \bigcup_{i \in I_n} e(n, i)$$

définie précédemment (*définition 1, b*). Dans la réunion dénombrable $s(n)$ choisissons pour tout $i \in I$ dans chaque ensemble essentiel non vide un point $x_i \in e(n, i)$, et désignons par D_n la réunion de ces points. Posons $D = \bigcup_n D_n$. L'ensemble $D \subset E$ est évidemment dénombrable.

Supposons qu'une suite d'applications $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \in F$ converge en chaque point $x \in D$ vers une application $f \in F$. Nous allons montrer que l'on a bien $\lim f_j = f$ en tout point $x \in E$. Soit un point $x \in (E - D)$. Pour tout n , x appartient à un $e(n, i)$, et l'on sait que, ou bien $e(n, i) \in s(n)$ ou $e(n, i) \in r(n)$; dans le second cas, il existe, par définition, un $e(n, i') \in s(n)$ tel que $e(n, i) \cap e(n, i') \neq \emptyset$ donc, dans les deux cas, il existe un point $x' \in D$ [soit $x' \in e(n, i)$ soit $x' \in e(n, i')$] tel que $\delta[f_j(x'), f_j(x)] \leq \frac{2}{n}$ et comme $\lim f_j(x') = f(x')$ on a $\delta[f_j(x), f(x)] \leq \frac{4}{n}$; cela étant vrai pour tout n , on a $\lim f_j = f$, pour $x \in E$ ce qui établit le théorème.

20. ESPACES K ET F COMPLETS. THÉORÈME DIRECT. — Supposons K complet et soit F une famille d'applications équi-associée au système essentiel $\mathcal{E}$. Considérons l'espace $\hat{F}$ qui comprend toutes les limites des suites convergentes d'applications $(f)_k \subset F$. Il est immédiat que $\hat{F}$ est équi-associée au même système essentiel $\mathcal{E}$; en effet, on a, d'une part, $\lim f_n = f$ pour tout $x \in E$ et d'autre part, $\delta[f_k[e(n, i)]] \leq \frac{1}{n}$ pour tout k . Ce qui est la condition classique d'égale continuité sur $e(n, i)$, d'où $\delta f[e(n, i)] \leq \frac{1}{n}$, ce qui établit la propriété.

De même, il est évident que $\hat{\hat{F}} = \hat{F}$. Montrons maintenant que la famille $\hat{F}$ est close; nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 18. — *Si la famille F d'applications de E dans K complet est équi-associée à $\mathcal{E}$, alors la famille $\hat{F}$ est équi-associée à $\mathcal{E}$ et cette famille est close.*

Démonstration. — Nous venons de voir que $\hat{F}$ est équi-associée à $\mathcal{E}$ et, d'après le théorème 17, $\hat{F}$ est continûment déterminable D. Nous pouvons donc supposer l'ensemble $D \in E$ connu. Soit $(f_k)_k \subset \hat{F}$ une suite de f_k convergente en chaque point $x \in D$. D'après ce qui précède, cette suite converge en chaque point $x \in E$. Or, K étant complet, le sous-ensemble de K , composé de points $\lim_{k \in \mathbb{N}} f_k = f$ est une application de E dans K , équi-associée à $\mathcal{E}$, donc $\hat{F}$ étant complet, $f \in \hat{F}$. Par conséquent $\hat{F}$ est close.

Nous connaissons déjà la structure topologique d'une famille d'applications continûment déterminable D et close (§ 16 et 17) dans le cas où K est métrique complet. En tenant compte des théorèmes 17 et 18, nous obtenons le

COROLLAIRE I. — *Si une famille F d'applications de E dans K métrique complet est équi-associée à un système essentiel $\mathcal{E}$, la famille complétée $\hat{F}$ possède la structure topologique d'un espace métrique complet, la convergence sur $\hat{F}$ étant équivalente à la convergence simple des applications correspondantes sur E .*

Supposons en plus K séparable; donc $\hat{F}$ est séparable et nous avons le

COROLLAIRE II. — *Si dans les conditions du corollaire I, K est séparable, alors $\hat{F}$ possède la structure topologique d'un espace métrique, complet et séparable au sens de la convergence simple.*

On sait que l'espace (E, K) de toutes les applications de E dans K est complet si K est complet (voir BOURBAKI, *loc. cit.*). Les corollaires I et II définissent les conditions suffisantes que doivent remplir les applications pour que leur famille F possède la structure topologique d'un espace complet (K complet) ou complet séparable (K complet séparable) formant un sous-espace de $\mathcal{F}$. Remarquons encore qu'étant donné un système essentiel $\mathcal{E}$, l'ensemble de toutes les applications équi-associées à $\mathcal{E}$ est un ensemble fermé dans $\mathcal{F}$.

21. CONDITIONS NÉCESSAIRES. THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES ESPACES FONCTIONNELS COMPLETS SÉPARABLES. — Il est remarquable que le corol-

laire II admet la réciproque. Cela signifie que le mode de formation des espaces fonctionnels complets séparables, à l'aide des familles d'applications équi-associées à un système essentiel $\mathcal{E}$ permet d'obtenir la *totalité de tels espaces*.

THÉOREME 19. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble F d'applications f de E dans K métrique complet séparable soit tel que $\hat{F}$ soit métrique complet séparable au sens de la convergence simple est que la famille des applications f soit équi-associée à un système essentiel $\mathcal{E}$.*

Démonstration. — La condition suffisante résulte du corollaire II. Il reste à démontrer la condition nécessaire. L'espace $F(E, K)$ étant donné conformément à l'énoncé, considérons l'espace $\mathcal{X}$ d'applications $\tilde{x}(f)$ de $F(E, K)$ dans K (voir § 18). Nous avons vu (lemme 2, § 18) que $\mathcal{X}$ est métrique complet et à base dénombrable (séparable). Désignons par X un sous-ensemble dénombrable et partout dense dans $\mathcal{X}$, tel que chaque point $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ soit limite d'une suite $(\tilde{x}) \subset X$; désignons par $F' \subset F$ un sous-ensemble dénombrable de points $f \in F$ partout dense dans F . Nous allons définir un ensemble de parties de E de telle sorte que cet ensemble forme un système essentiel $\mathcal{E}$ de E ; ensuite, nous montrerons que la famille des applications f est équi-associée à $\mathcal{E}$ (voir définition, § 19). Posons l'ensemble des indices $I \equiv E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, soit $\omega(n, \tilde{x})$ une boule fermée dans $\mathcal{X}$ de centre $\tilde{x}$ et de rayon $\frac{1}{2^n}$, cette boule définit un sous-ensemble de E ; d'une façon générale, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $e(n, x) = \omega(n, \tilde{x})$; ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons l'ensemble dénombrable $I_n \equiv X$. Vérifions que l'ensemble des sous-ensembles $e(n, x)$ de E forme un système essentiel; on a :

a. pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\bigcup_{x \in F} e(n, x) = E$, cela est évident;

b. pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons la réunion $\bigcup_{x \in X} e(n, x) = s(n)$;

il faut montrer que tout $x \in E$ s'il n'appartient pas à $s(n)$ appartient à $r(n) =$ réunion des $e(x, n)$ qui rencontrent $s(n)$; ceci est immédiat

car tout $x \in E$ appartient à un $e(n, x) = \omega(n, \tilde{x})$ et tout $\omega(n, \tilde{x})$ contient un point $x' \in X$, par conséquent on a

$$x' \in e(n, x') \in s(n) \quad \text{et} \quad e(n, x) \cap e(n, x') \neq \emptyset.$$

L'ensemble des parties $[e(n, x)]$ forme un système essentiel $\mathcal{E}$.

Il reste à montrer que la famille F est équi-associée au système essentiel $\mathcal{E}$. Considérons pour un $n \in \mathbb{N}$ et $x \in E$ l'ensemble correspondant $e(n, x) = \omega(n, \tilde{x})$; pour tout couple de points quelconques $(x', x'') \in e(n, x)$ d'après la définition de $\omega(n, \tilde{x})$, on a [en observant que $f_i(x') = \tilde{x}'(f_i)$] d'après (2)

$$d(\tilde{x}', \tilde{x}'') = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \delta[f_i(x'), f_i(x'')] \leq \frac{1}{2^n}$$

et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\delta[f_i(x'), f_i(x'')] \leq \frac{1}{2^n}$; or, tout $f \in F$ est limite d'une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset F'$, par conséquent, la même inégalité $\delta[f(x'), f(x'')] \leq \frac{1}{2^n}$ vaut pour toute $f \in F$ ce qui est équivalent à $\delta f[e(n, x)] \leq \frac{1}{2^n}$; donc la famille est équi-associée à $\mathcal{E}$.

C. Q. F. D.

22. ESPACES FONCTIONNELS COMPACTS AU SENS DE LA CONVERGENCE SIMPLE.

— On sait que la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}$ est induite par la topologie sur K . Il s'agit là d'un fait général (BOURBAKI, *Topologie*, chap. X, § 4), puisque la topologie sur $\mathcal{F}$ est la topologie de l'espace produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$ ou, dans notre cas, celle de $K^{\mathbb{N}}$. Donc, si K est

compact, $\mathcal{F}$ est compact et réciproquement (théorème de Tychonoff).

Supposons K compact. Si la famille F des applications est équi-associée à un système essentiel $\mathcal{E}$, alors on peut montrer directement que $\hat{F}$ est compact au sens de la convergence simple : les applications appartenant à $\hat{F}$ forment (d'après les théorèmes 17 et 18) une famille continûment déterminable D et close et, K étant compact, on peut de toute suite $(f_i) \subset F$, extraire une suite convergente, en chaque point $x \in D$, où D est l'ensemble déterminant dénombrable; la convergence sur D entraîne la convergence sur E d'où la proposition.

Inversement, si F est compact métrisable au sens de la convergence simple, K étant métrique et compact, on montre immédiatement que la famille est équi-associée à un système essentiel en observant que F est *a fortiori* complet et séparable. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 20. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace F d'applications f de E dans K compact métrique soit tel que $\hat{F}$ soit compact métrisable, est que toutes les applications f appartenant à F forment une famille équi-associée à un système essentiel $\mathcal{E}$.*

On obtient là encore tous les espaces compacts au sens de la convergence simple.

23. EXEMPLES DE SYSTÈMES ESSENTIELS. — Prenons comme espace de définition E le segment $(0, 1)$; I étant l'ensemble d'indices, posons $I \equiv E$.

1° Posons pour tout n et tout x , $e(n, x) =$ un ensemble ouvert contenant x . La famille $\mathcal{E}$ des $e(n, x)$ constitue un système essentiel. Une famille de fonctions équi-associée à $\mathcal{E}$ est dite *également continue*. Toute convergence est une convergence uniforme.

2° Pour tout n et pour tout x , posons $e(n, x) = x \cup$ [ensemble ouvert ayant x comme point d'accumulation]. Une famille de fonctions équi-associée à un $\mathcal{E}$ est dite *équi-quasi-continue*.

3° En posant pour tout n et pour tout x , $e(n, x) =$ ensemble mesurable d'épaisseur un en x et contenant x , on obtient une famille de fonctions *également continues en mesure* (ou *équi-approximativement continues*).

4° Si pour tout n et pour tout x $e(n, x) = x \cup$ [ensemble mesurable de mesure > 0 sur tout voisinage du point x], on obtient une famille *équi-quasi-continue en mesure*.

24. INTERPRÉTATION DE QUELQUES CRITÈRES DE CONSERVATION DE CLASSES. — D'après ce qui précède, tous les théorèmes, critères ou règles concernant la conservation de propriétés topologiques ou métriques par passage simple à la limite, sont des cas particuliers des précédents

théorèmes. Ces critères sont généralement formulés dans l'analyse relativement à une *fonction limite d'une suite convergente de fonctions* qui, elles, possèdent quelques propriétés dont on désire prouver l'invariance. Voici, par ordre chronologique, quelques critères connus; nous allons montrer qu'on les retrouve immédiatement à l'aide du théorème fondamental.

I. CRITÈRE DE CONTINUITÉ. LA QUASI-CONTINUITÉ D'ARZÉLA [1] (voir Gaguaeff [1]). — 1. — *Pour que la limite d'une suite convergente de fonctions continues soit continue, il faut et il suffit que pour tout $\eta > 0$ et tout N entier, il existe une suite finie $E_1, E_2, \dots, E_j$ (j fonction de n et de N) d'ensembles dont la réunion forme l'intervalle de définition $E = \bigcup E_j$, des fonctions, et une suite d'entiers $K_1, K_2, \dots, K_j > N$ telles que pour $n = 1, 2, \dots, j$ et pour tout $x \in E$,*

$$(1) \quad |f_{K_n}(x) - f(x)| < \eta.$$

Cette condition est équivalente à celle-ci : *Il existe un système essentiel (d'ensembles essentiels) $\{E_j\}_{j \in J}$ tel que, pour tout η et tout x , on a sur E_j [oscillation de f_n sur $E_j\] $\leq \eta$, sauf au plus pour un nombre fini de termes de la suite $\{f_n\}$. Voir aussi le critère de continuité (chap. I, p. 7).$*

II. CRITÈRE DE CONSERVATION DE CLASSE DE BAIRE (Lebesgue [1], Gaguaeff [1]). — Le critère de Lebesgue : *Pour qu'une fonction $\varphi(x)$ soit de classe α il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (Z_n) d'ensembles de classe α additive, telle que (X désignant l'ensemble où φ est définie et d le diamètre sur l'espace des valeurs de φ) on ait*

$$X = \sum Z_n \quad \text{et} \quad d[\varphi(Z_n)] \leq \varepsilon \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dans notre terminologie, φ est associé à un système essentiel (Z_n) d'ensembles de classe α additive. Le théorème de conservation de classe de Gaguaeff est formulé ainsi : *Soit pour tout n , $Cl f_n = \alpha$. Pour que $f = \lim f_n$ soit de classe α il faut et il suffit que pour tout $\eta > 0$ et tout entier N , il existe un nombre naturel $n > N$ tel que l'ensemble $E[|f(x) - f_n(x)| < \eta]$ soit de classe α additive. En*

comparant cette relation avec le critère de Lebesgue, on déduit immédiatement que la famille $\{f_n\}$ est équi-associée à un système essentiel composé d'ensembles de classe $\leq \alpha$ additive.

III. Conçus sur le même principe, les critères de M. Alexiewicz [1] sont plus généraux (le lecteur est prié de bien vouloir se référer à l'Ouvrage cité pour les détails) : un système essentiel (dénombrable) est défini au moyen d'ensembles (X_n) (dont la réunion $\bigcup X_n = X$ est le domaine de définitions de fonctions) formant une *classe H de Hausdorff* (Hausdorff [1]). On définit ensuite une classe H^* de fonctions qui sont (dans notre terminologie) associées à H . Le théorème de conservation de classe est formulé ainsi : *Soit $f(x)$ limite d'une suite convergente $\{f_n\}$ de fonctions définies sur X et appartenant à la classe H^* . Pour que $f \in H^*$, il faut et il suffit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement $\bigcup X_n = X$ et une suite d'indices $\{\rho_n\}$ tels que pour $d[f_{\rho_n}(x), f(x)] \leq \varepsilon$ pour $x \in X_n$ et $n = 1, 2, \dots$. Donc la famille $\{f_n\}$ est équi-associée à $\{X_n\}$, sauf, pour chaque X_n , au plus pour un nombre fini de termes de la suite ⁽¹¹⁾, d'où le théorème.*

Remarque. — Il est évident que l'on peut lever cette dernière restriction en modifiant convenablement le recouvrement $\{Z_n\}$; en procédant comme il a été indiqué dans la démonstration du théorème 19, on obtient un système essentiel $\{X'_n\} \subset H$, tel que la famille $\{f_n\} \subset H$, soit équi-associée à ce système.

BIBLIOGRAPHIE.

ALEXIEWICZ :

- [1] *On Hausdorff classes* (*Fund. Math.*, t. 34, 1947, p. 61).

BAIRE :

- [1] *Sur les fonctions de variables réelles* (*Thèse*, 1899) [*Ann. Math. pur. e appl.*, (3), t. 3, p. 1-122].

⁽¹¹⁾ Voir aussi le critère de conservation de quasi-continuité (Motchane [3]).

BANACH :

- [1] *Sur une classe de fonctions continues* (*Fund. Mat.*, t. 8, 1926, p. 166-173).

BOURBAKI :

- [1] *Éléments de mathématiques*, livre III, chap. IX, p. 21.
- [2] *Ibid.*

CHOQUET :

- [1] *Application des propriétés descriptives* (*J. Math. pures et appl.*, t. 26, fasc. II, 1947).
- [2] *Convergences* (*Ann. Univ. Grenoble*, t. 23, 1947-1948, p. 57 et suiv.).

DENJOY :

- [1] *Sur les fonctions dérivées sommables* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 63, fasc., III. et IV, 1915).
- [2] *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, Gauthier-Villars, 1941-1948.

GAGAEFF :

- [1] *Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B* (*Fund. Mat.*, t. 18, 1932, p. 182-187).

HAURDORFF :

- [1] *Mengenlehre*, 3^e éd., 1927.

HAHN :

- [1] *Über Funktionen mehreren Veränderlichen* (*Math. Z.*, t. 4, 1919, p. 310).

KEMPISTY :

- [1] *Fonctions quasi continues* (*Fund. Mat.*, t. 19, 1933, p. 185).

KURATOWSKI :

- [1] *La propriété de Baire dans les espaces métriques* (*Fund. Mat.*, t. 16, 1930).
- [2] *Topologie*, t. I, 1948.

LEBESGUE :

- [1] *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*J. Math. pures et appl.*, 1905).

LUSIN :

- [1] *Leçons sur les ensembles analytiques* (*Collection E. Borel*, Gauthier-Villars, 1930, p. 303).

MOTCHANE :

- [1] *Sur la répartition des points de continuité d'une fonction de n variables continues par rapport à chacune d'elles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 17).
- [2] *Sur les critères de conservation de classes et les familles de fonctions fermées au sens de la convergence simple* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1206).
- [3] *Espaces compacts au sens de la convergence simple* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1569).

MONTGOMERY :

- [1] *Non separable metric spaces* (*Fund mat.*, t. 23, 1935, p. 527).

VERESS (P.) :

- [1] *Über Kompakte Funktionenmengen und Bairische Klassen* (*Fund. Mat.*, t. 7, 1925, p. 244).

ZAHORSKY :

- [1] *Sur la première dérivée* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 69, n° 1, 1950, p. 1-54).



TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION.....	I

CHAPITRE I.

SUITES CONVERGENTES D'APPLICATIONS. CRITÈRE DE CONTINUITÉ DES APPLICATIONS LIMITES.
CRITÈRES DE CONSERVATION DE CLASSE DE FONCTIONS BORÉLIENNES.

1. Critère de continuité.....	7
2. Critère de continuité et oscillation.....	10
3. Oscillation de continuité, critères relatifs aux fonctions de Baire.....	13
4. Applications quasi-continues.....	18
5. Suites de fonctions quasi-continues.....	21
6. Fonctions quasi-approximativement continues.....	22
7. Fonctions dérivées.....	24
8. Fonctions dérivées et fonctions quasi-continues.....	25

CHAPITRE II.

APPLICATIONS SÉPARÉMENT CONTINUES.

9. Définitions et notations.....	31
10. Applications séparément continues sur un espace-produit.....	32
11. Quasi-continuité.....	33
12. Les fibres de continuité dans les espaces-produits.....	34
13. Extension du théorème 12.....	38
14. Applications séparément continues sur une surface ponctuellement discontinue.....	39

CHAPITRE III.

ESPACES FONCTIONNELS COMPLETS ET COMPACTS AU SENS DE LA CONVERGENCE SIMPLE.

15. Définitions et notations.....	42
16. Structures topologiques.....	43

	Pages.
17. Structures uniformes	45
18. Cas de K séparable (à base dénombrable).....	47
19. Systèmes essentiels d'ensembles. Familles d'applications équi-associées à de tels systèmes.....	49
20. Espaces K et F complets. Théorème direct.....	50
21. Conditions nécessaires. Théorème fondamental sur les espaces fonction- nels complets séparables.....	51
22. Espaces fonctionnels compacts au sens de la convergence simple.....	53
23. Exemples de systèmes essentiels.....	54
24. Interprétation de quelques critères de conservation de classes.....	54
BIBLIOGRAPHIE	56



DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Définition intrinsèque de l'Aire



Vu et approuvé :

Paris, le 12 décembre 1954.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN SARRAILH.



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

Quai des Grands-Augustins, 55.

147884

Dépôt légal, imprimeur, 1955, N° 1072.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

147884 Quai des Grands-Augustins, 55.
